A felsöbb analysis' elemei. 2.

Egyet. ny.
Budan; Budapest 1840

A' FELSŐBB
ANALYSIS' ELEMEI.

IRTA

GYŐRY SÁNDOR,

FÖLDMÉRŐ, 'S A' M. T. TÁRSASÁG' RENDES TAGJA.

MÁSODIK FÜZET.

A' MAGYAR TUDÓS TÁRSASÁG' KÖLTSÉGÉVEL.

BUDÁN,
A' MAGYAR KIRÁLYI EGYETEM BETŰIVEL.

1840.

TUDNIVALÓK.

1. A' m. t. társaság ezen munkának csak kiadója lévén, nem kezeskedik a' benne követett nyelvszabályokról, sem az irásmódról, sem végre akárminemü nyelvet 's irást illető elvekről; egyedül arra kivánt a' kéziratok' birálatában ügyelni, hogy az elfogadott és sajtó alá bocsátandó munka, mint egész, egy vagy más tekintetből ajánlható legyen, 's a' literatura' jelen állapotjában kiadásra méltónak tartathassék.

2. Nem vizsgálhatván meg a' benyújtott kéziratokat a' társaság fejenként és egészben: ez, u. m. A' felsőbb analysis' elemei, Győry Sándor által, Bitnicz Lajos és Nyíry István', mint e' végre hivatalosan megbizott rendes tagok' ajánlására adatott sajtó alá.

3. A' társaság által kiadott kéziratok közül ez LXVIII-dik számu.

Pesten, december 30. 1840.

D. Schedel Ferencz,
titoknok.

TARTALOM.

A' folytonos vagy láncz-törekekről.

(*De fractionibus continuis vel catenatis.*)

A' sorzatok' öszvehajlásának ismertetményeiről eddigiekben eléadott tanitmányok, arra szolgáltak: hogy a' változók' és ismeretlenek értékeit, azon esetben is ha teljesen meg nem határozhatjuk, legalább közelítőleg kitudhassuk számítani; ennek véghez vitelére azonban még egy nevezetes eszköze lévén az analysisnek az úgy nevezett folytonos vagy lánctörekek' tudományában: mi előtt tovább mennénk azoknak ismertetését 's nevezetesebb tulajdonságait szükséges leszen előbocsátani. Erre nézve:

Folytonosoknak neveztetnek az ollyan törekek, mellyeknek nevezőjök, egy vagy több vagy szinte végetlen számu tagokon keresztül, valami egész számbol és egyszersmind törekből tétetik össze. Magában értetvén hogy e' mellet a' tulajdonképen úgy nevezett törek értékéhez, valami különálló szám is járulhat. Például illyetén folytonos vagy lánctörekek volnának:

$$R=\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d}};\quad R=\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}\quad R=Q+\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\cfrac{g}{h+..\text{sat.}}}}}$$

Melly kitételeknek előterjesztésére, a' számítókat a' nevezőktől elválasztó keresztvonalak helyett, az osztás' másik szokott jegyével élvén, sok esetekben alkalmasabban irhatjuk:

$$R=a:b+c:d;\quad R=a:b+c:d+e:f$$
$$R=Q+a:b+c:d+e:f+g:h+\ldots\ \text{stb.}$$

Még világosabb általláthatás kedviért pedig, a' számitók' egymás után következő tagait, rendel: a_1; a_2; a_3..... a_n-nel; a' nevezőkét: b_1; b_2; b_3...b_n-el jegyezvén, a' folytonos törekek' általános előterjesztése valami hozzá kapcsolt különálló számmal együtt:

1.) $R=a_0+a_1:b_1+a_2:b_2+a_3:b_3+\ldots\ldots\ a_n:b_n$; mellyben az: a_0; a_1; a_2.... a_n; b_1; b_2; b_3.... b_n jegyek alatt akarmi mennyiséget érthetünk;

az $a_1:b_1$; $a_2:b_2$; $a_3:b_3$..... $a_n:b_n$ által jegyzett törekeket a' láncz törek' első, második, harmadik, ... n dik tagjainak nevezhetjük; 's a' lánctörek maga, (n)-nek véges vagy végetlen értékével meg szakad, vagy végetlenül tovább folytatik.

Ezen kivül könnyen látható lévén, hogy: mivel akármellyik adott számu tagot, az előtteni tag' nevezőjével, ugyan azon közös nevezőjü törekké lehet általváltoztatni, 's e' munkálatot a' többi tagokon is határozatlanul tovább folytatni; mig nem végre az egész feladott lánctörek szükségképen csupán egy tagból álló számítóju és nevezőjü törekké válik: a' végetlenül folytatottakra nézve pedig, itt is azon átalános törvény tudatával megkelletvén elégednünk, mi szerint bizonyos számu tagok' meghatározott értékéből az eggyel több számu tagok értékét mindig egyenlő munkálattal feltalálhatjuk, legelébb is ezen munkálatok' átalános menetelét fogjuk kifejteni. Minekokáért:

Jegyezzük átalánosan az $a_n:b_n$-ig folytatott láncz törek' értékét (n)-nek 0-tol folyvást előre menő értéket adván $\frac{M_n}{N_n}$-nel leszen:

Elsőben a' szokott számvetési munkálatok következésében azonnal;

$$R=\frac{M_0}{N_0}=a_0;\ \text{mellyből: } M_0=a_0;\ N_0=1$$

$$R=\frac{M_1}{N_1}=a_0+\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_0b_1+a_1}{b_1}\ \text{mellyből: } M_1=a_0b_1+a_1;\ N_1=b_1$$

$$\text{az az: } M_1=M_0b_1+N_0a_1;\quad N_1=N_0b_1=b_1$$

$$R=\frac{M_2}{N_2}=a_0+a_1:b_1+a_2:b_2=a_0+\frac{a_1b_2}{b_1b_2+a_2}=\frac{a_0(b_1b_2+a_2)+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}$$

$$=\frac{(a_0b_1+a_1)b_2+a_0a_2}{b_1b_2+a_2}$$

$$\text{az az: } M_2=M_1b_2+M_0a_2;\quad N_2=N_1b_2+N_0a_2$$

$$R=\frac{M_3}{N_3}=a_0+a_1:b_1+a_2:b_2+a_3:b_3=a_0+\frac{a_1}{b_1+a_2:b_2+a_3:b_3}$$

$$=a_0+\frac{a_1}{b_1+a_2b_3:b_2b_3+a_3}=a_0+\frac{a_1(b_2b_3+a_3)}{b_1(b_2b_3+a_3)+a_2b_3}$$

$$=\frac{a_0b_1(b_2b_3+a_3)+a_0a_2b_3+a_1(b_2b_3+a_3)}{b_1(b_2b_3+a_3)+a_2b_3}=\frac{M_2b_3+M_1a_3}{N_2b_3+N_1a_3}$$

$$\text{az az: } M_3=M_2b_3+M_1a_3;\quad N_3=N_2b_3+N_1a_3$$

Mellyekből a' számvetési munkálatok' menetele látható lévén, hasonlatosság szerint egyszersmind azon következést huzhatjuk: hogy a' láncztörek' értékét jelentő közönséges törekben, a' számítók és nevezők egymásból származtának törvénye következendő:

$\dfrac{M_n}{N_n} =$

0.	1.	2.	3.	....	n.
a_0	$M_0 b_1 + a_1$	$M_1 b_2 + M_0 a_2$	$M_2 b_3 + M_1 a_3$	....	$M_{n-1} b_n + M_{n-2} a_n$
1	$N_0 b_1 + 0$	$N_1 b_2 + N_0 a_2$	$N_2 b_3 + N_1 a_3$	....	$N_{n-1} b_n + N_{n-2} a$

Például számokban legyen:

$$R = 3 + 5 : 7 + 2 : 9 + 6 : 11 + 7 : 5 = 3 + 5 : 7 + 2 : 9 + 30 : 62 = 3 + 5 : 7 + 124 : 588$$

$$= 3 + 2940 : 4240 = \frac{15660}{4240} = R$$

Az eléadott egymásbol származtatásoknál fogva pedig lenne:

$$a_0 = 3;\ a_1 = 5;\ a_2 = 2;\ a_3 = 6;\ a_4 = 7$$

$$b_1 = 7;\ b_2 = 9;\ b_3 = 11;\ b_4 = 5 \text{ és így:}$$

$\dfrac{M_n}{N_n} =$

0.	1.	2.	3.	4.
3	3.7 + 5	26.9 + 3.2	240.11 + 26.6	2796.5 + 240.7
1	1.7 + 0	7.9 + 1.2	65.11 + 7.6	757.5 + 65.7

$$\frac{3}{1} \quad \frac{26}{7} \quad \frac{240}{65} \quad \frac{2796}{757} \quad \frac{15660}{4240} = \frac{M_4}{N_4} = R$$

Mindazáltal a' mondottak' megmutatásául jelentse β_1, a' b_1-en; β_2, a' b_2-ön; β_3 a' b_3-on..... stb. kezdődő és határozatlanul tovább folytatott láncztörek' értékét; 's ennél fogva:

$$\beta_1 = b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4 \ldots\ldots \text{stb. honnét } \beta_1 = b_1 + \frac{a_2}{\beta_2} = \frac{b_1 \beta_2 + a_2}{\beta_2}$$

$$\beta_2 = b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4 + a_5 : b_5 \ldots\ldots \text{stb. honnét } \beta_2 = b_2 + \frac{a_3}{\beta_3} = \frac{b_2 \beta_3 + a_3}{\beta_3}$$

$$\beta_3 = b_3 + a_4 : b_4 + a_5 : b_5 + a_6 : b_6 \ldots\ldots \text{stb. honnét } \beta_3 = b_3 + \frac{a_4}{\beta_4} = \frac{b_3 \beta_4 + a_4}{b_4}$$

. . . .

$$\beta_{n-1} = b_{n-1} + \frac{a_n}{\beta_n};\ \text{(n)nek véges értékével: } \beta_{n-1} = b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1} b_n + a_n}{b_n}$$

lévén itt is: $M_0 = a_0$; $M_1 = a_0 b_1 + a_1$; $N_0 = 1$; $N_1 = b_1$

ha a' további tagokra nézve tesszük átalánosan: $R = \frac{M_n}{N_n}$ tehát:

$$R = \frac{M_n}{N_n} = \frac{a_0 \beta_1 + a_1}{\beta_1}$$ a' β_1 értékét helyettezvén:

$$\frac{M_n}{N_n} = \frac{a_0(b_1\beta_2 + a_2) + a_1\beta_2}{b_1\beta_2 + a_2} = \frac{(a_0 b_1 + a_1)\beta_2 + a_0 a_2}{b_1\beta_2 + a_2} = \frac{M_1\beta_2 + M_0 a_2}{N_1\beta_2 + N_0 a_2}$$

következőleg a' második tagra nézve (n)-nek $= 2$ értéket adván:

$$R = \frac{M_2}{N_2} = \frac{M_1 b_2 + M_0 a_2}{N_1 b_2 + N_0 a_2}$$

hasonlag tovább folytatva, mivel a' legközelebbiekből:

$$R = \frac{M_1\beta_2 + M_0 a_2}{N_1\beta_2 + N_0 a_2}$$ és: $\beta_2 = \frac{b_2\beta_3 + a_3}{\beta_3}$; helyettezéssel:

$$R = \frac{M_n}{N_n} = \frac{M_1(b_2\beta_3 + a_3) + M_0 a_2\beta_3}{N_1(b_2\beta_3 + a_3) + N_0 a_2\beta_3} = \frac{M_2\beta_3 + M_1 a_3}{N_1\beta_3 + N_0 a_3}$$

's ismét a' harmadik tagra nézve (n)-nek $= 3$ értéket adván:

$$R = \frac{M_3}{N_3} = \frac{M_2 b_3 + M_1 a_3}{N_2 b_3 + N_1 a_3}$$

's hogy ezen okoskodásokat akármellyik (n-1)dik tagról, a' következő (n)dikre végetlenül tovább folytathatni, magában látható.

Különösebb figyelemre méltók azonban az ollyatén láncztörekek, mellyekben az egymás után következő, 's fentebb a_1; a_2; $a_3 \ldots a_n$-el jegyzett számítók egységet tesznek. Származásuk ez:

Akármi töreknek mind számítója mind nevezője ugyan azon számmal osztatván, tudvalévőképen annak értéke nem változik, 's így $R = \frac{M}{N} = 1 : \frac{N}{M}$;

most a' nevezőben valóságos osztás eszközöltetvén, nevezzük a' találtató hanyadost $= b_1$ a' maradékot $= N - Mb_1$ tegyük $= N_1$ leszen az eredeti törek' értéke $R = \frac{M}{N} = \frac{1}{b_1 + \frac{N_1}{M}} = \frac{1}{b_1 + 1 : \frac{M}{N_1}}$; következőleg ugyan azon munkálatnak minden maradékoknál ismételt megújításával, a' törek' közös legnagyobb szorzója felkereséséhez mindenben hasonlatos bánással találni fogjuk:

$$R=\frac{M}{N}=\frac{1}{b_1+1:b_2+1:b_3+1:b_4\ldots 1:b_n}$$

Például számokban, legyen: $R=\dfrac{3653}{1667}=2+\dfrac{319}{1667}$; leszen:

$$R=2+319:1667=2+\frac{1}{5+72:319}=2+\frac{1}{5+1:4+31:72}$$

$$=2+\frac{1}{5+1:4+1:2+10:31}=2+\frac{1}{5+1:4+1:2+1:3+1:10}$$

$$=2+1:5+1:4+1:2+1:3+1:10.$$

Egyébiránt a' most említett lánctörekekre nézve észre kell vennünk:

1.) Hogy, mivel ezekben: $a_1=a_2=a_3=\ldots a_n=1$; ennél fogva az $R=\dfrac{M_n}{N_n}$ törek' értékét kifejező számitók' és nevezők egymásból származtának törvényét, a' fentebbi átalános lehozatok szerint következőképen lehet előterjeszteni.

$$\frac{M_n}{N_n}=\boxed{\frac{a_o}{1}\Bigg|\frac{M_o b_1+1}{N_o b_1+0}\Bigg|\frac{M_1 b_2+M_o}{N_1 b_2+N_o}\Bigg|\frac{M_2 b_3+M_1}{N_2 b_3+N_1}\Bigg|\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\Bigg|\frac{M_{n-1} b_n+M_{n-2}}{N_{n-1} b_n+N_{n-2}}}$$

2.) Az egymás után következő és M_o; M_1; $M_2 \ldots\ldots M_n$-el jegyzett számítók, valamint a' megfelelő nevezők is folytában nagyobbodnak.

Ugyan is a' számítókra nézve: b_n-nek akármi egész szám értékével, egységet is ide értvén; szembetűnőképen: $a_o=M_o<M_o+1$; 's annál inkább: $M_o<M_o b_1+1$; hasonlag $M_o b_1+1=M_1<M_1+M_o$; 's annál inkább: $M_1<M_1 b_2+M_o \ldots$'s így tovább.

A' nevezőkre nézve: $N_o=1$; tehát $b_1=1$-nek tétetvén $N_o=N_1$; ellenben tovább folytatva: $N_o b_1=N_1<N_1+N_o$ annál inkább $N_1<N_1 b_2+N_o$; $N_1 b_2+N_o=N_2<N_2+N_1$ annál inkább $N_2<N_2 b_3+N_1 \ldots$ stb.

3.) $\dfrac{M_o}{N_o}-\dfrac{M_1}{N_1}=\dfrac{M_o N_1-N_o M_1}{N_o N_1}$; $\dfrac{M_1}{N_1}-\dfrac{M_2}{N_2}=\dfrac{M_1 N_2-N_1 M_2}{N_1 N_2}$;

$\dfrac{M_2}{N_2}-\dfrac{M_3}{N_3}=\dfrac{M_2 N_3-N_2 M_3}{N_2 N_3}, \ldots$ stb. és mivel:

$$M_o N_1-N_o M_1=M_o(N_o b_1)-N_o(M_o b_1+1)=-N_o=-1$$
$$M_1 N_2-N_1 M_2=M_1(N_1 b_2+N_o)-N_1(M_1 b_2+M_o)=N_o M_1-M_o N_1=+1$$
$$M_2 N_3-N_2 M_3=M_2(N_2 b_3+N_1)-N_2(M_2 b_3+M_1)=N_1 M_2-M_1 N_2=-1$$

a' kitalált értékek' helyretételével következik:

$$\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{M_n}{N_n} = \frac{\pm 1}{N_{n-1}.N_n}$$

minél fogva a' két egymásutáni törekek' értékének külzése váltogatva állitóbol tagatóvá stb. változik; — ezenkivül: mivel az átalános külzés' kitételében a' számítót egység, a' nevezőt pedig az egymásután következő 's mindig nagyobbodó N_{n-1}; N_n-el jegyzett mennyiségek' tevete jelenti: ehez képest a' mondott külzésnek szükségképen mindig fogyatkozni, vagy is a' számbavett több több tagok' értékének, az igazhoz mindig közelebb járulni, 's annál — váltogatva hol kisebbnek hol nagyobbnak kell lenni. Melly tulajdonságukért, a' szemlélet aláfogott láncztörekek' több több összeszámított tagainak értékei, közelitő törekeknek mondatnak.

4.) Az egymásutáni közelitő törekek, egyszersmind a' lehető legkisebb számítók és nevezők által adatnak, 's azokat közös osztóval alább szállitani nem lehet. Mert tegyük fel hogy $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}$-nek közös osztója volna (a) kellene lenni:

$$\frac{(N_n\, M_{n-1} - M_n.N_{n-1}):a}{N_n.N_{n-1}:a} = \frac{1:a}{N_n.\,N_{n-1}:a}$$ már pedig $\frac{1}{N_n\, N_{n-1}}$-nek az egységen kivül más közös osztója nincs.

5.) Az eléadott osztások közben b_1; b_2; b_3..... b_n helyett a' legközelebbi nagyobbik hanyadost vévén, az után következő törek tagadóvá válik. Igy a' fentebbi példában lenne $\frac{319}{1667} = \frac{1}{6 - 247:319}$; melly szerint hol kisebb hol nagyobb hanyadosok' vételével a' tagokat hol állítókká hol tagadókká tehetni, mindazáltal ez esetben a' fentebbi megutatások helyet nem találván, a' láncztörek azon jeles tulajdonságától hogy az igaz érték az összeszámitott eggyel több, és eggyel kevesebb tagok' értékei közé esik, megfosztatnék. Ellenben:

6) Ha szinte b_1; b_2; b_3-nak stb. a' legközelebbi nagyobbik hanyadosokat tesszük is, folyvást és kivétel nélkül igy tévén minden fentebbi megmutatások ismét alkalmazhatók lesznek; mellynél fogva a' mondott tulajdonsággal bíró lánczörekeknek a' következő formáit találjuk:

1.) $a:b_1 + 1:b_2 + 1:b_3 + 1:b_4$....... stb. és
2.) $a:b_1 - 1:b_2 - 1:b_3 - 1:b_4$....... stb. vagy:
3.) $a:b_1 + 1: - b_2 + 1: - b_3 + 1: - b_4$ stb.

Ez utóbbiakra nézve:

II.) Jegyezzük rövidebben az: $1:b_1+1:-b_2+1:-b_3\ldots$ stb. láncztöreket igy $(b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ a' következő egyenletek valósága azonnal szembetűnik:

1.) $(b_1)=\dfrac{1}{b_1}$; $(b_1, b_2)=\dfrac{1}{b_1-(b_2)}$; $(b_1, b_2, b_3)=\dfrac{1}{b_1-(b_2, b_3)}\ldots$ stb.

az az átalánosan: $(b_1)=\dfrac{1}{b_1}$; $(b_1\ldots\ldots b_n)=\dfrac{1}{b_1-(b_2\ldots\ldots b_n)}$

nem különben megforditva:

2.) $b_1=\dfrac{1}{(b_1)}$; $b_1-(b_2)=\dfrac{1}{(b_1\,b_2)}$; $b_1-(b_2, b_3)=\dfrac{1}{(b_1, b_2, b_3)}$ stb.

átalánosan: $b_1=\dfrac{1}{(b_1)}$; $b_1-(b_2\ldots\ldots b_n)=\dfrac{1}{(b_1\ldots\ldots b_n)}$

3.) $(b_1\ldots\ldots b_n)=[b_1, b_2-(b_3\ldots\ldots b_n)]$
$=[b_1, b_2, b_3-(b_4\ldots\ldots b_n)]$
$=[b_1, b_2, b_3, b_4-(b_5\ldots\ldots b_n)]$

. . . .

4.) $(b_1\ldots\ldots b_n, \infty)=(b_1\ldots\ldots b_n)$
5.) $(b_1\ldots\ldots b_n, 0)=(b_1\ldots\ldots b_{n-1})$

Legyen a' változók egymástól függése lánczttörek által adva b_{n+1} helyett y-ont tévén e'képen:

$x=(b_1, b_2\ldots\ldots b_n, y)$ következik: (1. szám)

$x=\dfrac{1}{b_1-(b_2\ldots\ldots b_n, y)}$ honnét:

$(b_2\ldots\ldots b_n, y)=b_1-\dfrac{1}{x}=b_1-(x)$ az az: (2. szám.)

$(b_2\ldots\ldots b_n, y)=\dfrac{1}{(b_1, x)}$'s tovább folytatva:

$(b_3\ldots\ldots b_n, y)=b_2-(b_1, x)=\dfrac{1}{(b_2, b_1, x)}$

$(b_4\ldots\ldots b_n, y)=b_3-(b_2, b_1, x,)=\dfrac{1}{(b_3, b_2, b_1, x)}$

. . . .

mig nem végezetre:

$$(b_n, y) = \frac{1}{(b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1, x)} \text{ mellyből:}$$

$$(y) = b_n - (b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_2, b_1, x,) = \frac{1}{(b_n, b_{n-1} \ldots b_1, x)}$$

az az mivel $(y) = \frac{1}{y}$

$$6.)\ x = (b_1, b_2, b_3 \ldots b_n, y)$$
$$y = (b_n, b_{n-1}, b_{n-2} \ldots b_1, x)$$

mellyek közül egyik egyenletnek, a' másik mindenkor szükséges következménye.

Mivel továbbá egyszersmind, az utóbbi két egyenlet szerint az x akármi meghatározott értékének, viszont az y–nak is csupán egy meghatározott értéke felelhet meg: ennél fogva az x és y közötti viszonyt, ezen átalános egyenlet alá foglalhatjuk:

$$7.)\ A + Bx + Cy + Dxy = 0$$

mellyben x és y változó lévén ha $y = \infty$; találtatik:

a' 4-ből $x = (b_1 \ldots b_n)$ a' 7-ből pedig $C + Dx = 0$'s innét:

$$8.)\ \frac{C}{D} = -(b_1 \ldots b_n)$$

ellenben lévén $y = 0$; találtatik:

az 5-ből $x = (b_1 \ldots b_{n-1})$'s a' 7-ből $A + Bx = 0$; honnét:

$$9.)\ \frac{A}{B} = -(b_1 \ldots b_{n-1})$$

Nem különben ha $x = \infty$ találtatik:

4.) és 6.) szerint $y = (b_n \ldots b_1)$ a' 7-ből pedig $B + Dy = 0$; 's innét:

$$10.)\ \frac{B}{D} = -(b_n \ldots b_1)$$

ellenben lévén $x = 0$; találtatik:

5.) és 6.) szerint $y = (b_n \ldots b_2)$'s a' 7-ből $A + Cy = 0$, honnét:

$$11.)\ \frac{A}{C} = -(b_n \ldots b_2)$$

minekokáért találni fogjuk $\frac{A}{D}$-nek értékét egyszerü szorozással a' 8.) és 11.)-ből nem különben 9.) és 10.)-ből egymáshoz egyenlítve:

12.) $(b_1 \ldots b_n)(b_n \ldots b_2) = (b_n \ldots b_1)(b_1 \ldots b_{n-1}) = \frac{A}{D}$ következőleg:

$$(b_1 \ldots b_n)(b_n \ldots b_2) - (b_n \ldots b_1)(b_1 \ldots b_{n-1}) = 0$$

és igy a' fentebbi 7-dik szám alattival azonos egyenletbe:

$\frac{A}{D} + \frac{B}{D} x + \frac{C}{D} y + xy = 0$ a' kitalált értékeket helyhetvén:

13.) a.) $(b_1 \ldots b_n)(b_n \ldots b_2) - (b_n \ldots b_1)x - (b_1 \ldots b_n)y + xy = 0$
b.) $(b_n \ldots b_1)(b_1 \ldots b_{n-1}) - (b_n \ldots b_1)x - (b_1 \ldots b_n)y + xy = 0$

szorzókra osztva, mivel:

$$xy - y(b_1 \ldots b_n) - x(b_n \ldots b_1) + (b_n \ldots b_1)(b_1 \ldots b_n) = [x - (b_1 \ldots b_n)].[y - (b_n \ldots b_1)]$$

14.) a.) $[x - (b_1 \ldots b_n)].[y - (b_n \ldots b_1)] = (b_1 \ldots b_n).[(b_n \ldots b_1) - (b_n \ldots b_2)]$
b.) $[x - (b_1 \ldots b_n)].[y - (b_n \ldots b_1)] = (b_n \ldots b_1)[(b_1 \ldots b_n) - (b_1 \ldots b_{n-1})]$

ezenkivül:

$$x - (b_1 \ldots b_n) = (b_1 \ldots b_n, y)$$

$$y - (b_n \ldots b_1) = \frac{1}{(y, b_n \ldots b_1)}$$

15.) $$\frac{(b_1 \ldots b_n, y) - (b_1 \ldots b_n)}{(y, b_n \ldots b_1)} = (b_1 \ldots b_n)[(b_n \ldots b_1) - (b_n \ldots b_2)]$$

$$\ldots \ldots = (b_n \ldots b_1)[(b_1 \ldots b_n) - (b_1 \ldots b_{n-1})]$$

Mostan y helyett b_{n+1}-et helyhetvén, 's a' $(b_1 \ldots b_{n+1}) - (b_1 \ldots b_n)$; $(b_1 \ldots b_n) - (b_1 \ldots b_{n-1})$; $(b_1 \ldots b_{n-1}) - (b_1 \ldots b_{n-2}) \ldots$ stb. külzéseket illetőleg: $\triangle(b_1 \ldots b_n)$; $\triangle(b_1 \ldots b_{n-1})$; $\triangle(b_1 \ldots b_{n-2})$-vel.... stb. jelölvén:

16.) a) $\triangle(b_1 \ldots b_n) = (b_{n+1} \ldots b_1)(b_n \ldots b_1)\triangle(b_1 \ldots b_{n-1})$

tehát egyenkint és egymásután kifejtve:

b) $\triangle(b_1, b_2) = (b_3, b_2, b_1)(b_2, b_1)\triangle(b_1)$
$\triangle(b_1 b_2 b_3) = (b_4 b_3 b_2 b_1)(b_3 b_2 b_1)\triangle(b_1 b_2)$
$\triangle(b_1 b_2 b_3 b_4) = (b_5 b_4 b_3 b_2 b_1)(b_4 b_3 b_2 b_1)\triangle(b_1 b_2 b_3)$

. . . .

már pedig:

$$\triangle(b_1) = (b_1 b_2) - (b_1) = [1 : b_1 - 1 : b_2] - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{b_1(b_1 b_2 - 1)}$$

$= \frac{b_1}{b_1 b_2 - 1} \cdot \frac{1}{b_1^2} = [1 : b_2 - 1 : b_1] \cdot \frac{1}{b_1^2} = (b_2 b_1)(b_1)^2$ ennél fogva:

c) $\triangle(b_1) = (b_2 b_1)(b_1^2)$
$\triangle(b_1 b_2) = (b_3 b_2 b_1)(b_2 b_1)^2 (b_1)^2$

$$\triangle(b_1 b_2 b_3) = (b_4 b_3 b_2 b_1)(b_3 b_2 b_1)^2 (b_2 b_1)^2 (b_1)^2$$
$$\triangle(b_1 \ldots b_4) = (b_5 \ldots b_1)(b_4 \ldots b_1)^2 (b_3 \ldots b_1)^2 (b_2 b_1)^2 (b_1)^2$$

. . . .

következőleg:

17.) a) $\dfrac{(b_1 \ldots b_n b_{n+1}) - (b_1 \ldots b_n)}{(b_{n+1} \ldots b_1)} = \dfrac{\triangle(b_1 \ldots b_n)}{(b_{n+1} \ldots b_1)}$ másképen:

b) $[x - (b_1 \ldots b_n)] . [y - (b_n \ldots b_1)] = (b_n \ldots b_1)^2 (b_{n-1} \ldots b_1)^2 \ldots (b_2 b_1)^2 (b_1)^2$

's ez utolsó egyenlet szerint az $[x-(b_1 \ldots b_n)] . [y-(b_n \ldots b_1)]$ tevete szükségképen mindig állító lévén: ha $x \gtrless (b_1 \ldots b_n)$ azonképen kell lenni: $y \gtrless (b_n \ldots b_1)$

Továbbá: $(b_n \ldots b_1)\,[(b_1 \ldots b_n) - (b_1 \ldots b_{n-1})]$
$= (b_1 \ldots b_n)\,[(b_n \ldots b_1) - (b_n \ldots b_2)]$
honnét következtetjük hogy mivel ezen egyenletben, a' második rész az elsőből csupán az elemek' egyszerü megforditása által származik, az első részben kifejezett külzés nem változtatja értékét ha benne az elemek megforditott rendel iratnak, 's illetőleg $(b_n \ldots b_1)$ elemek helyett, a' $(b_1 \ldots b_n)$ elemekkel az egyenletbe foglalt munkálatokat végezzük.

Minekokáért a' 16-dik szám alattihoz mindenben hasonlatos helyettezésekkel találni fogjuk:

18.) a) $(b_n \ldots b_1)^2 (b_{n-1} \ldots b_1)^2 \ldots (b_2 b_1)^2 (b_1)^2 = (b_1 \ldots b_n)^2 (b_2 \ldots b_n)^2 \ldots (b_{n-1} b_n)^2 . (b_n)^2$

b) $\pm (b_n \ldots b_1).(b_{n-1} \ldots b_1) \ldots (b_2 b_1)(b_1) = \pm (b_1 \ldots b_n).(b_2 \ldots b_n) \ldots (b_{n-1} b_n)(b_n)$

vagy is; egyszersmind a' kettős előjegyek miatt támadható kétség eloszlatására a' 12-dik szám szerint leszen:

$$(b_1 \ldots b_n)(b_n \ldots b_2) = (b_n \ldots b_1)(b_1 \ldots b_{n-1})$$
$$(b_2 \ldots b_n)(b_n \ldots b_3) = (b_n \ldots b_2)(b_2 \ldots b_{n-1})$$
$$(b_3 \ldots b_n)(b_n \ldots b_4) = (b_n \ldots b_3)(b_3 \ldots b_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(b_{n-2} b_{n-1} b_n)(b_n b_{n-1}) = (b_n b_{n-1} b_{n-2})(b_{n-2} b_{n-1})$$
$$(b_{n-1} b_n)(b_n) = (b_n b_{n-1})(b_{n-1})$$

az egyenletek' első 's második részeit egymással szorozván, a' mind két részben előforduló $(b_n \ldots b_2)$; $(b_n \ldots b_3) \ldots$ stb. közös szorzók elhagyásával:

19.) $(b_1 \ldots b_n)(b_2 \ldots b_n) \ldots (b_{n-1} b_n)(b_n) = (b_n \ldots b_1)(b_1 \ldots b_{n-1}) \ldots (b_{n-2} b_{n-1})(b_{n-1})$

tegyük ezentúl:

20.) $\dfrac{1}{(b_1 \ldots b_n)(b_2 \ldots b_n) \ldots (b_{n-1} b_n)(b_n)} = \{b_1 \ldots b_n\}$

mellyből egymásutáni származtatással könnyen találni fogjuk:

$$\frac{1}{\{b_1\ldots b_n\}}=\frac{(b_n\ldots\ldots b_1)}{\{b_1\ldots\ldots b_{n-1}\}}$$

$$\frac{1}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}}=\frac{(b_{n-1}\ldots b_1)}{\{b_1\ldots b_{n-2}\}}$$

$$\frac{1}{\{b_1\ldots b_{n-2}\}}=\frac{(b_{n-2}\ldots b_1)}{\{b_1\ldots b_{n-3}\}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\{b_1\ldots b_3\}}=\frac{(b_3\ldots b_1)}{\{b_1\,b_2\}}$$

$$\frac{1}{\{b_1\,b_2\}}=\frac{(b_2\,b_1)}{\{b_1\}}$$

és igy; mind kétfelöl szorozva, a' közös szorzók' elhagyásával, mivel egyszersmind $\frac{1}{\{b_1\}}=b_1$

$$\frac{1}{\{b_1\ldots b_n\}}=(b_n\ldots b_1)(b_{n-1}\ldots b_1)\ldots\ldots(b_2 b_1)(b_1) \text{ honnét:}$$

21.) $(b_1\ldots b_n)(b_2\ldots b_n)\ldots(b_{n-1}b_n)(b_n)=(b_n\ldots b_1)(b_{n-1}\ldots b_1)\ldots\ldots(b_2 b_1)(b_1)$

vagy is: $\{b_1\ldots\ldots b_n\}=\{b_n\ldots\ldots b_1\}$

következőleg az elemek' $\{b_1\ldots\ldots b_n\}$-el jegyzett függvénye nem változtatja értékét ha benne az elemek visszaforditott rendel vétetnek, 's ez utóbbi lehozatok szerint a' jegyek iránt is kétség nem támadhatván az állító $\{b_1\ldots b_n\}$-nek ugyan csak állító és egyenlő $\{b_n\ldots b_1\}$ felel meg. Továbbá:

Megállapított eljegyzésünk szerint:

$$\frac{1}{(b_1\ldots\ldots b_n)(b_2\ldots b_n)\ldots\ldots(b_{n-1}b_n)(b_n)}=\{b_1\ldots b_n\}$$

$$\frac{1}{(b_2\ldots b_n)(b_3\ldots b_n)\ldots\ldots(b_{n-1}\,b_n)(b_n)}=\{b_2\ldots\ldots b_n\} \text{ tehát:}$$

22.) $(b_1\ldots\ldots b_n)=\frac{\{b_2\ldots\ldots b_n\}}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}}=\frac{\{b_n\ldots\ldots b_2\}}{\{b_n\ldots\ldots b_1\}}$

mellynél fogva a' $(b_1\ldots\ldots b_n)$ láncztöreket mindenkor a' legközelebbi hanyados formában lehet előterjeszteni. Hasonlóképen ismét azon jegyezés következtében:

23.) $(b_n\ldots b_1)=\frac{\{b_{n-1}\ldots\ldots b_1\}}{\{b_n\ldots\ldots b_1\}}=\frac{\{b_1\ldots\ldots b_{n-1}\}}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}}$ és mivel:

$$(b_n\ldots\ldots b_1)=\frac{1}{b_n-(b_{n-1}\ldots b_1)}(131.\ \text{l.}\ 1.\ \text{sz.})=\frac{1}{b_n-\frac{\{b_1\ldots b_{n-2}\}}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}}}\ (23.\ \text{sz.})$$

$$=\frac{\{b_1\ldots b_{n-1}\}}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}b_n-\{b_1\ldots b_{n-2}\}}\ \text{leszen a' 23-dik sz. szerint:}$$

$$\frac{\{b_1\ldots b_{n-1}\}}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}\,b_n-\{b_1\ldots b_{n-2}\}}=\frac{\{b_1\ldots\ldots b_{n-1}\}}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}}\ \text{azért is:}$$

24.) $\{b_1\ldots\ldots b_n\}=\{b_1\ldots\ldots b_{n-1}\}\,b_n-\{b_1\ldots\ldots b_{n-2}\}$

mellynél fogva lévén egymásután:

$$\{b_1\ldots\ldots b_5\}=\{b_1\ldots b_4\}\,b_5-\{b_1\ldots b_3\}$$
$$\{b_1\ldots\ldots b_4\}=\{b_1\ldots b_3\}\,b_4-\{b_1\ b_2\}$$
$$\{b_1\ldots b_3\}=\{b_1\ b_2\}\,b_3-\{b_1\}\ \text{következik:}$$

$\{b_1\ldots\ldots b_4\}$ és $\{b_1\ldots b_3\}$ értékeinek egymásutáni helyettezésével:

$$\{b_1\ldots\ldots b_5\}=\{b_1\ldots b_3\}(b_4b_5-1)-\{b_1b_2\}\,b_5$$
$$\ldots\ldots=\{b_1b_2\}(\,b_3(b_4b_5-1)-b_5)-\{b_1\}(b_4b_5-1)$$

Mivel pedig: $\{b_1b_2\}=\dfrac{1}{(b_1b_2)(b_2)}=b_1b_2-1$ és $\{b_1\}=\dfrac{1}{(b_1)}=b_1$

látnivalóképen a' $\{b_1\ldots\ldots b_5\}$-el jegyzett függvény a' maga elemeinek egész, arányos (rationalis) függvénye: 's mivel az előterjesztett lehozatokat akár hány elemeken keresztül folytathatni, ugyan azt kell állitanunk a' határozatlan számu elemekből álló $\{b_1\ldots\ldots b_n\}$ függvényről is; 's annak következtében akarmi $(b_1\ldots b_n)$ láncztöreket közönséges törek formában lehetséges előállítani, mellynek mind számítója mind nevezője a' maga b_1; b_2; b_3; $\ldots b_n$ elemeinek egész, arányos függvénye.

Fentebb a' 16. 22. és 23-dik számok szerint találtuk:

$$\triangle(b_1\ldots b_{n-1})=(b_n\ldots b_1)(b_{n-1}\ldots b_1)^2\ldots\ldots(b_3b_2b_1)^2(b_2b_1)^2(b_1)^2$$

$$\ldots\ldots=\frac{(b_n\ldots b_1)}{\{b_{n-1}\ldots b_1\}}=\frac{1}{\{b_{n-1}\ldots b_1\}\{b_n\ldots b_1\}}=\frac{1}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}\{b_1\ldots b_n\}}$$

az az $\triangle(b_1\ldots b_{n-1})=\dfrac{1}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}\{b_1\ldots\ldots b_n\}}=(b_1\ldots\ldots b_n)-(b_1\ldots b_{n-1})$

$$\ldots\ldots\frac{1}{\{b_1\ldots b_{n-1}\}\{b_1\ldots b_n\}}=\frac{\{b_2\ldots\ldots b_n\}}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}}-\frac{\{b_2\ldots b_{n-2}\}}{\{b_1\ldots b_{n-2}\}}\ \text{tehát:}$$

25.) $\{b_1\ldots\ldots b_{n-1}\}\{b_2\ldots b_n\}-\{b_1\ldots b_n\}\{b_2\ldots\ldots b_{n-1}\}=1$

A' 17-dik és 20-dik számok' öszvehasonlításával:

$$26.)\ [x-(b_1\ldots\ldots b_n)]\ [y-(b_n\ldots b_1)] = \frac{1}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}^2}$$

's a' baloldalon a' szorozást valósággal végre hajtván, mivel egyszersmind:

$(b_1\ldots b_n) = \dfrac{\{b_2\ldots\ldots b_n\}}{\{b_1\ \ldots\ b_n\}}$; $(b_n\ldots\ldots b_1) = \dfrac{\{b_1\ldots b_{n-1}\}}{\{b_1\ \ldots\ b_n\}}$ 22.) 23.) azonkivül 1-nek 25-ik

szám alatti értékével:

$$27.)\ \{b_1\ldots\ldots b_n\}\,xy - \{b_1\ldots\ldots b_{n-1}\}\,x - \{b_2\ldots\ldots b_n\}\,y + \{b_2\ldots\ldots b_{n-1}\} = 0.$$

B.) Továbbiakra nézve, tegyük fel a' lánctörek' elemeit két szakaszokra felosztva, 's ezen feltételnek megfelelő eljegyezéssel, a' két változó egymástól függésének elöterjesztésére adva legyen a' következő egyenlet:

1.) a) $x = (b_1, b_2\ldots\ldots b_m, b_{m+1}\, b'_1\, b'_2\ldots\ldots b'_n, y)$ mellyből:

b) $x = (b_1, b_2\ldots\ldots b_m, b_{m+1} - (b'_1\, b'_2\ldots\ldots b'_n, y)$

és így tétetvén $u = (b'_1, b'_2\ldots b'_n, y)$

c) $x = (b_1, b_2\ldots\ldots b_m, b_{m+1} - u)$

nem különben ha tesszük $b_{m+1} - u = v$

d) $x = (b_1, b_2\ldots\ldots b_m, v)$

Legyen ezentúl:

$(b_1\ \ldots\ldots b_m) = \alpha$; $(b_m\ldots\ldots b_1) = \beta$; $1:\{b_1\ldots\ldots b_m\} = \gamma$

$(b'_{m+1}\ldots b'_n) = \alpha'$; $(b'_n\ldots\ldots b'_1) = \beta$; $1:\{b'_1\ldots\ldots b'_n\} = \gamma'$

leszen a' 26-ik szám szerint:

2.) a) $(x-\alpha)\,(v-\beta) = \gamma^2$
b) $(u-\alpha')\,(y-\beta) = \gamma'^2$ mellyekből mivel:

$$v - \beta = \frac{\gamma^2}{x-\alpha},\qquad u - \alpha' = \frac{\gamma'^2}{y-\beta}$$

v helyett annak fentebbi értékét $b_{m+1} - u$-t tévén, és $b_{m+1} - \beta - \alpha'$-t δ-val jelelvén:

$$c.)\ \frac{\gamma^2}{x-\alpha} + \frac{\gamma'^2}{y-\beta} = \delta$$

Hasonlatosképen ha tesszük:

$(b_1\ldots\ldots b'_n) = \alpha''$; $(b'_n\ldots\ldots b_1) = \beta''$; $1:(b_1\ldots\ldots b'_n) = \gamma''$; leszen:

d.) $(x-\alpha'')\,(y-\beta'') = \gamma''^2$

Az a) és b) alatti egyenletekből pedig következvén, hogy ha v; és igy azzal együtt u; végetlennek tétetik, egy részről a) szerint kell lenni $x = \alpha$ más részről b) szerint $y = \beta'$; nem különben a' d) alattiból ha $x = \alpha'$; $y = \infty$; 's viszont ha $y = \beta''$; $x = \infty$; ezen háromféle öszvetartozó értékek' helyretételével találni fogjuk:

$$3.)\ a)\ \gamma^2 = (\alpha'' - \alpha)\delta;\ \gamma'^2 = (\beta'' - \beta')\delta;\ \gamma''^2 = (\alpha - \alpha'')(\beta' - \beta'')$$

's ezen legközelebbi egyenletek' segedelmével:

$$b.)\ (\alpha'' - \alpha)^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2};\ (\beta'' - \beta')^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2};\ \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2}$$

$$c.)\ (\alpha'' - \alpha) = \frac{\gamma\gamma''}{\gamma'};\ (\beta'' - \beta') = \frac{\gamma'\gamma''}{\gamma};\ \delta = \frac{\gamma\gamma'}{\gamma''}$$

Hogy a' c) alatti utolsó egyenletekben ugyan azon jegyeket kell venni, onnét kitetsző; mivel ha ellenkező jegyek vétetnének, például:

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'};\ \text{és}\ \beta'' - \beta' = \mp\frac{\gamma'\gamma''}{\gamma}\ \text{következnék:}$$

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = -\frac{\gamma\gamma''.\gamma'\gamma''}{\gamma'.\gamma} = -\gamma''^2$$

az a.) alatti egyenlet ellenére melly szerint kell lenni:

$$(\alpha'' - \alpha)(\beta'' - \beta') = \gamma''^2$$

Nem különben ha ellenkező jegyek vételével, tétetnék:

$$\alpha'' - \alpha = \pm\frac{\gamma\gamma''}{\gamma'};\ \text{és:}\ \delta = \mp\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''};\ \text{hasonlag következnék:}$$

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \frac{-\gamma\gamma''}{\gamma'}.\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = -\gamma^2$$

szintén az a.) alatti egyenlet ellenére, melly szerint kell lenni:

$$(\alpha'' - \alpha)\delta = \gamma^2$$

Annak megmutatására továbbá, hogy mind két részről az állító jegyeket kell vennünk, a' következő lehozatok szolgálhatnak.

Az α; α''; γ; γ'; γ''; értékeit (137 lap 1. szám) vissza helyhetvén találtatik:

$$(b_1 \ldots . b_n') - (b_1 \ldots .. b_n) = \pm\frac{\{b_1' \ldots .. b_n'\}}{\{b_1 \ldots . b_n\}.\{b_1 \ldots . b_n'\}}\ \text{vagy is:}$$

$$\frac{\pm\{b_1' \ldots \ldots b_n'\}}{\{b_1 \ldots .. b_n\}.\{b_1 \ldots .. b_n'\}} = \frac{\{b_2 \ldots \ldots b_n'\}}{\{b_1 \ldots .. b_n'\}} - \frac{\{b_2 \ldots .. b_n\}}{\{b_1 \ldots .. b_n\}}\ (22.)\ \text{sz.})$$

honnét:

$$\pm\{b_1' \ldots .. b_n'\} = \{b_1 \ldots .. b_n\}.\{b_2 \ldots .. b_n'\} - \{b_1 \ldots .. b_n'\}\{b_2 \ldots .. b_n\}$$

mivel pedig:

$$\{b_1 \ldots\ldots b_n\}\{b_2 \ldots\ldots b_1'\} - \{b_1 \ldots\ldots b_1'\}\{b_2 \ldots\ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_{n+1}\} b_1' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$- \{b_1 \ldots b_{n+1}\}\{b_2 \ldots b_n\} b_1' + \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_{n+1}\} b_1' - \{b_1 \ldots b_{n+1}\}\{b_2 \ldots b_n\} b_1'$$
$$= b_1' = \{b_1'\}$$

továbbá:

$$\{b_1 \ldots\ldots b_n\}\{b_2 \ldots\ldots b_2'\} - \{b_1 \ldots\ldots b_2'\}\{b_2 \ldots\ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_1'\} b_2' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_1 \ldots b_{n+1}\} - \{b_1 \ldots b_1'\}\{b_2 \ldots b_n\} b_2' + \{b_1 \ldots b_{n+1}\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_1'\} b_2' - \{b_1 \ldots b_1'\}\{b_2 \ldots b_n\} b_2' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_{n+1}\} + \{b_1 \ldots b_{n+1}\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= b' b_2' - 1 = \{b_1' b_2'\}$$

azonképen:

$$\{b_1 \ldots\ldots b_n\}\{b_2 \ldots\ldots b_3'\} - \{b_1 \ldots\ldots b_3'\}\{b_2 \ldots\ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_2'\} b_3' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_1'\} - \{b_1 \ldots b_2'\}\{b_2 \ldots b_n\} b_3' + \{b_1 \ldots b_1'\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_3'\} b_3' - \{b_1 \ldots b_2'\}\{b_2 \ldots b_n\} b_3' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_1'\} + \{b_1 \ldots b_1'\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= \{b' b_2'\} b_3' - \{b_1'\} = \{b_1' b_2' b_3'\}$$

's tovább folytatva:

$$\{b_1 \ldots\ldots b_n\}\{b_2 \ldots\ldots b_4'\} - \{b_1 \ldots\ldots b_4'\}\{b_2 \ldots\ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_3'\} b_4' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_2'\} - \{b_1 \ldots b_3'\}\{b_2 \ldots b_n\} b_4' + \{b_1 \ldots b_2'\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_3'\} b_4' - \{b_1 \ldots b_3'\}\{b_2 \ldots b_n\} b_4' - \{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_2'\} + \{b_1 \ldots b_2'\}\{b_2 \ldots b_n\}$$
$$= \{b_1' b_2' b_3'\} b_4' - \{b_1' b_2'\} = \{b_1' b_2' b_3' b_4'\}$$

mellyeknek következésében akarhány tagokon keresztül lévén mindenkor:

$$\{b_1 \ldots b_n\}\{b_2 \ldots b_n'\} - \{b_1 \ldots\ldots b_n'\}\{b_2 \ldots\ldots b_n\} = \{b_1' \ldots\ldots b_n'\}$$

nyilván van, hogy az egyenlet mind két felén az állitó jegyeket kell öszve venni.

A' c.) alatti egyenletekben elsőben β''; β'; γ'; γ''; γ; értékeinek helyettezésével

$$4.)\; b_n' \ldots b_1) - (b_n' \ldots b_1') = \frac{\{b_1 \ldots\ldots b_n\}}{\{b_1 \ldots b_n'\}\{b_1' \ldots b_n'\}}$$

nem különben δ értékét is helyettezvén:

$$5.)\; b_{n+1} - (b_n \ldots\ldots b_1) - (b_1' \ldots b_n') = \frac{\{b_1 \ldots b_n'\}}{\{b_1 \ldots b_n\}\{b_1' \ldots b_n'\}}$$

és mivel:

$$(b_n \ldots b_1) = \frac{\{b_n \ldots b_{n-1}\}}{\{b_1 \ldots b_n\}};\quad (b_1' \ldots b_n') = \frac{\{b_2' \ldots b_n'\}}{\{b_1' \ldots b_n'\}}$$

6.) $\{b_1 \ldots b_n\}\,\{b_1' \ldots b_n'\}\,b_{n+1} - \{b_1 \ldots b_n'\} = \{b_1 \ldots b_{n-1}\}\,\{b_1' \ldots b_n'\} + \{b_1 \ldots b_n\}\,\{b_2' \ldots b_n'\}$

vagy mivel: $\{b_1 \ldots b_n\}\,b_{n+1} - \{b_1 \ldots b_{n-1}\} = \{b_1 \ldots b_{n+1}\}$

7.) $\{b_1 \ldots b_{n+1}\}\,\{b_1' \ldots b_n'\} = \{b_1 \ldots b_n'\} + \{b_1 \ldots b_n\}\,\{b_2' \ldots b_n'\}$

C.) Az előadott tételek alkalmazása végett:

Legyen a' feladott láncztörek négy szakaszokra felosztva, 's ezen felvételnek megfelelő eljegyezéssel:

$$x = (b_1 \ldots b_n;\ b_{n+1};\ b_1' \ldots b_n';\ b_{n+1}';\ b_1'' \ldots b_n'';\ b_{n+1}'';\ b_1''' \ldots b_n''';\ y)$$

's tétessék:

$$x' = (b_1' \ldots b_n';\ b_{n+1}';\ b_1'' \ldots y)$$
$$x'' = (b_1'' \ldots b_n'';\ b_{n+1}'';\ b_1''' \ldots y)$$
$$x'' = (b_1''' \ldots b_n''';\ y)$$

leszen:

$$x = (b_1 \ldots b_n;\ b_{n+1} - x')$$
$$x' = (b_1' \ldots b_n';\ b_{n+1}' - x'')$$
$$x'' = (b_1'' \ldots b_n'';\ b_{n+1}'' - x''')$$
$$x'' = (b_1''' \ldots b_n''';\ y)$$

's tegyük rövidebben:

$$(b_1 \ldots b_n) = \alpha;\ (b_n \ldots b_1) = \beta;\ 1 : \{b_1 \ldots b_n\} = \gamma$$
$$(b_1' \ldots b_n') = \alpha';\ (b_n' \ldots b_1') = \beta';\ 1 : \{b_1' \ldots b_n'\} = \gamma'$$
$$(b_1'' \ldots b_n'') = \alpha'';\ (b_n'' \ldots b_1'') = \beta'';\ 1 : \{b_1'' \ldots b_n''\} = \gamma''$$
$$(b_1''' \ldots b_n''') = \alpha''';\ (b_n''' \ldots b_1''') = \beta''' : 1 : \{b_1''' \ldots b_n'''\} = \gamma'''$$

ennél fogva a' 26-dik szám szerint (**137** lap)

1.) $(x - \alpha)\,(b_{n+1} - x' - \beta) = \gamma^2$

$(x' - \alpha')\,(b_{n+1}' - x'' - \beta') = \gamma'^2$

$x'' - \alpha'')\,(b_{n+1}'' - x''' - \beta'') = \gamma''^2$

$(x''' - \alpha''')\,(y - \beta''') = \gamma'''^2$

mellyekből:

$$x = \alpha + \frac{\gamma^2}{b_{n+1} - \beta - x'}$$
$$x' = \alpha' + \frac{\gamma'^2}{b_{n+1}' - \beta' - x''}$$
$$x'' = \alpha'' + \frac{\gamma''^2}{b_{n+1}'' - \beta'' - x'''}$$
$$x''' = \alpha''' + \frac{\gamma'''^2}{y - \beta'''}$$

's végezetre az x'; x''; x''' értékeinek egymásutáni helyettezésével:

2.) $$x = \alpha + \gamma^2 : [b_{n+1} - \beta - \alpha'] - \gamma'^2 : [b'_{n+1} - \beta' - \alpha''] - \gamma''^2 : [b''_{n+1} - \beta'' - \alpha'''] - \gamma'''^2 : y - \beta'''$$

mellyek szerint a' feladott láncztöreket, annyi számu tagokbol állóvá lehet által változtatni, a' hány szakaszra az elemek felosztattak.

Még ezt is azonban kiszámitás végett alkalmasabb formára következőképen vehetjük. Legyen:

$$x - \alpha = z;\ x' - \alpha' = z';\ x'' - \alpha'' = z'';\ x''' - \alpha''' = z'''$$

leszen az elébbiekből (140 lap. 1. sz.)

3.) $$\begin{aligned} z\,(b_{n+1} - \beta - \alpha' - z') &= \gamma^2 \\ z'\,(b'_{n+1} - \beta' - \alpha'' - z'') &= \gamma'^2 \\ z''\,(b''_{n+1} - \beta'' - \alpha''' - z''') &= \gamma''^2 \\ z'''\,(y - \beta''') &= \gamma'''^2 \end{aligned}$$

Mivel pedig (139 lap 5-dik szám) szerint:

$$b_{n+1} - \beta - \alpha' = b_{n+1} - (b_n \ldots b_1) - (b'_1 \ldots\ldots b'_n) = \frac{\{b_1 \ldots b'_n\}}{\{b_1 \ldots b_n\}\ \{b'_1 \ldots b'_n\}}$$

$$b'_{n+1} - \beta' - \alpha'' = b'_{n+1} - (b'_n \ldots b'_1) - (b''_1 \ldots b''_n) = \frac{\{b'_1 \ldots\ldots b''_n\}}{\{b'_1 \ldots\ldots b'_n\}\ \{b''_1 \ldots\ldots b''_n\}}$$

$$b''_{n+1} - \beta'' - \alpha''' = b''_{n+1} - (b''_n \ldots b''_1) - (b'''_1 \ldots b'''_n) = \frac{\{b''_1 \ldots\ldots b'''_n\}}{\{b''_1 \ldots b''_n\}\ \{b'''_1 \ldots b'''_n\}}$$

és (135 lap 22-dik szám) szerint:

$$y - \beta''' = y - (b'''_n \ldots\ldots b'''_1) = y - \frac{\{b'''_1 \ldots\ldots b'''_{n-1}\}}{\{b'''_1 \ldots\ldots b'''_n\}}$$

honnét ezen értékeknek, 's nem különben γ; γ'; γ''; γ''' értékeinek helyettezésével; elsőben:

4.) $$\begin{aligned} z\left[\frac{\{b_1 \ldots\ldots b'_n\}}{\{b_1 \ldots b_n\}\ \{b'_1 \ldots b'_n\}} - z'\right] &= \frac{1}{\{b_1 \ldots\ldots b_n\}^2} \\ z'\left[\frac{\{b'_1 \ldots\ldots b''_n\}}{\{b'_1 \ldots b'_n\}\ \{b''_1 \ldots b''_n\}} - z''\right] &= \frac{1}{\{b'_1 \ldots\ldots b'_n\}^2} \\ z''\left[\frac{\{b''_1 \ldots\ldots b'''_n\}}{\{b''_1 \ldots b''_n\}\ \{b'''_1 \ldots b'''_n\}} - z'''\right] &= \frac{1}{\{b''_1 \ldots\ldots b''_n\}^2} \\ z'''\left[y - \frac{\{b'''_1 \ldots\ldots b'''_{n-1}\}}{\{b'''_1 \ldots\ldots b'''_n\}}\right] &= \frac{1}{\{b'''_1 \ldots\ldots b'''_n\}^2} \end{aligned}$$

annak utánna: tétetvén röviditésül.

$$\{b_1 \ldots b_n\}z = v;\ \{b'_1 \ldots\ldots b'_n\}z' = v';\ \{b''_1 \ldots\ldots b''_n\}z'' = v'';\ \{b'''_1 \ldots b'''_n\}z''' = v'''$$

$$5.)\, v\,[\{b_1\ldots b'_n\} - \{b_1\ldots b_n\}\, v'] = \{b'_1\ldots\ldots b'_n\}$$
$$v'\,[\{b'_1\ldots\ldots b''_n\} - \{b'_1\ldots\ldots b'_n\}\, v''] = \{b''_1\ldots\ldots b''_n\}$$
$$v''\,[\{b''_1\ldots b'''_n\} - \{b''_1\ldots b''_n\}\, v'''] = \{b'''_1\ldots\ldots b'''_n\}$$
$$v'''\,[\{b'''_1\ldots b'''_n\}\, y - \{b'''_1\ldots b'''_n\}] = 1$$

végezetre lévén:

$$x = \alpha + z = (b_1\ldots b_n) + \frac{v}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}} = \frac{\{b_2\ldots\ldots b_n\}}{\{b_1\ldots, b_n\}} + \frac{v}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}}$$

szorzókra osztva leszen:

$$6.)\, x = \frac{1}{\{b_1\ldots\ldots b_n\}}\,[\{b_2\ldots\ldots b_n\} + v]$$

mellyből a' v; v'; v''; v''' értékeinek egymásutáni helyettezésével;

$$7.)\, \{b_1\ldots b_n\}\, x = \{b_2\ldots b_n\} + \frac{\{b'_1\ldots b'_n\}}{\{b_1\ldots b'_n\}} - \cfrac{\{b_1\ldots b_n\}\{b''_1\ldots b''_n\}}{\{b'_1\ldots b''_n\} - \cfrac{\{b'_1\ldots b'_n\}\{b'''_1\ldots b'''_n\}}{\{b''_1\ldots b''_n\} - \cfrac{\{b''_1\ldots b''_n\}}{\{b'''_1\ldots b'''_n\}y - \{b'''_1\ldots b'''_{n-1}\}}}}$$

A' Möbius által tett ezen ujabb szemléletek figyelemre méltóbbaknak látszottak, mint sem hogy azokat elmellőzhetőknek tarthattuk volna (l. Supplement zu G. S. Klügels Wörterbuch v. J. A. Grunert.) Mellyeknek felvilágositására a' főbb tételekben, legyen Például:

1.) $\frac{52}{85} = x = 1:2 - 1:3 - 1:4 - 1:5 - 1:y$ kell lenni (132 lap 6dik szám) szerint:

$$y = 1:5 - 1:4 - 1:3 - 1:2 - 1:\frac{52}{85}$$

honnét: $y = 1:5 - 5:1 = \infty$ az az:

$$x = \frac{52}{85} = 1:2 - 1:3 - 1:4 - 1:5 \text{ (131 lap 4-ik szám)}$$

ellenben ha:

$$x = \frac{52}{85} = 1:2 - 1:3 - 1:4 - 1:y \text{ leszen viszont:}$$

$$y = 1:4 - 1:3 - 1:2 - 1:\frac{52}{85}$$

honnét $y = 5$ és hasonlag:

$$x = \frac{52}{85} = 1:2 - 1:3 - 1\cdot 4 - 1:5$$

2.) Ugyan ezen példában lévén $\frac{52}{85}=x=1:2-1:3-1:4-1:y$ leszen:

$x-(b_1\ldots b_n)=\frac{52}{85}-[1:2-1:3-1:4]=\frac{52}{85}\cdot\frac{-11}{18}$ honnét:

$x=\frac{936}{1530}$; $(b_1\ldots b_n)=\frac{935}{1530}$ és $x>(b_1\ldots\ldots b_n)$; hasonlag:

$y-(b_n\ldots b_1)=-[1:4-1:3-1:2]=5\ \frac{-5}{18}$ az az:

$y=\frac{90}{18}$; $(b_n\ldots\ldots b_1)=\frac{5}{18}$ és $y>(b_n\ldots\ldots b_1)$; végezetre:

$$[x-(b_1\ldots b_n)].[y-(b_n\ldots\ldots b_1)]=(2,3,4)^2(3,4)^2(4)^2=\frac{1}{324}=\frac{1}{1530}\cdot\frac{85}{18}$$

(134 lap 17-ik szám)

3.) Legyen $x=\frac{73}{199}=(b_1\ldots\ldots b_5)$ mellyben:

$b_1=3$; $b_2=-5$; $b_3=-1$; $b_4=-4$; $b_5=-7$; Mivel:

$\{b_1\ldots\ldots b_5\}=\{b_5\ldots,\ldots b_1\}$ (135 lap 21-ik szám) leszen:

$x=1;3-1:5-1;1-1:4-(1:7)=(b_5)$

$=1:3-1:5-1:1-(7:27)=(b_4\,b_5)$

$=1:3-1:5-(27:20)=(b_3\,b_4\,b_5)$

$=1:3-(20:73)=(b_2\,b_3\,b_4\,b_5)$

$=(73;199)=(b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5)$ mellyekből:

$$\frac{1}{\{b_1\ldots\ldots b_5\}}=\frac{73}{199}\cdot\frac{-20}{73}\cdot\frac{-27}{20}\cdot\frac{-7}{27}\cdot\frac{-1}{1}=\frac{1}{199}\ \text{(134 lap 20-ik szám)}$$

A' visszás rendel leirt elemekből pedig:

$1:7-1:4-1:1-1:5-(1:3)=(b_1)$

$1:7-1;4-1:1-(3:14)=(b_2\,b_1)$

$1:7-1:4-(14:11)=(b_3\,b_2\,b_1)$

$1:7-(11:30)=(b_4\,b_3\,b_2\,b_1)$

$(30:199)=(b_5\,b_4\,b_3\,b_2\,b_1)$'s viszont;

$$\frac{1}{\{b_5\ldots\ldots b_1\}}=\frac{30}{199}\cdot\frac{-11}{30}\cdot\frac{-14}{11}\cdot\frac{-3}{14}\cdot\frac{-1}{3}=\frac{1}{199}\ \text{tehát:}$$

$\{b_1\ldots\ldots b_5\}=\{b_5\ldots\ldots b_1=199$ (135 lap 21 szám).

4.) Legyen $x = 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 \ldots$ stb. melly kitételt ha két két elemekből álló szakaszokra felosztva gondoljuk:

$$\text{leszen: } \alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' \ldots\ \text{'stb.} = \beta = \beta' = \beta'' = \beta''' \ldots\ \text{'stb.} = \frac{2}{3}$$

$$b_3 = b'_3 = b''_3 = b'''_3 \ldots\ \text{'stb} = 2$$

$$\gamma = \gamma' = \gamma'' = \gamma''' \ldots\ \text{'stb.} = \frac{-1}{3}$$

$$b_3 - \beta - \alpha' = b'_3 - \beta' - \alpha'' = b''_3 - \beta'' - \alpha''' \ldots\ \text{'stb.} = \frac{2}{3}$$

következőleg (131 lap 2-ik szám) szerint:

$$x = \frac{2}{3} + \cfrac{1:9}{\frac{2}{3} - \cfrac{1:9}{\frac{2}{3} - \cfrac{1:9}{\frac{2}{3} \ldots\ \text{'stb.}}}}$$

mellynél fogva a' láncztörek első tagján megállapodva;

$$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 = \frac{5}{6}$$

egy taggal tovább folytatva pedig:

$$x = \frac{2}{3} + \cfrac{1:9}{\frac{2}{3} - \cfrac{1:9}{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \text{ 's hasonlag:}$$

$$x = 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:2 = \frac{8}{9}$$

Legyen még:

$$x = 1:2 - 1:3 - 1:4 - 1:5 - 1:6 - 1:7 - 1:8 - 1:9 - 1:10 - 1:11 - 1:12 - 1:13$$

vagy is felvett eljegyzésünk szerint:

$$x = (2, 3, 4, \ldots 13)$$

mellyet, két két elemekből álló szakaszokra felosztva gondolván, leszen:

$$\begin{array}{llll}
1:2 - 1:3 = 3:5 = \alpha; & 1:3 - 1:2 = 2:5 = \beta; & -1:5 = \gamma \\
1:5 - 1:6 = 6:29 = \alpha'; & 1:6 - 1:5 = 5:29 = \beta'; & -1:29 = \gamma' \\
1:8 - 1:9 = 9:71 = \alpha''; & 1:9 - 1:8 = 8:71 = \beta''; & -1:71 = \gamma'' \\
1:11 - 1:12 = 12:131 = \alpha'''; & 1:12 - 1:11 = 11:131 = \beta'''; & -1:131 = \gamma'''
\end{array}$$

ezeken kivül $b_3 = 4$; $b'_3 = 7$; $b''_3 = 20$; $b'''_3 = 13$; mellyekből:

$$x = \frac{3}{5} + \cfrac{1:25}{\cfrac{-523}{145} + \cfrac{1:841}{\cfrac{12970}{2059} + \cfrac{1:5041}{\cfrac{85609}{9301} + \cfrac{1:17161}{\cfrac{1714}{131}}}}}$$

III. Átalánosabb szemléletek:

Azon meghatározás következtében, mi szerint folytonos, vagy láncz-töreknek azon töreket neveztük; mellynek nevezője, egy vagy több, vagy szinte végetlen számú tagokon keresztül, valami egész számbol és egyszersmind törekből tétetik öszve: 's ehez képest átalános formának felvettük: (125. lap).

$$R = Q + a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4 \ldots \text{'stb.}$$

mivel pedig ennél fogva a_1; a_2; a_3;.... 'stb és b_1; b_2; b_3.... 'stb nem csak egységet, 's nem csak egész számokat jelenthetnek; sőt már a' legközelebbi példában is ollyatén formáju láncz-törekre akadtunk mellyben mind az (a) mind a' (b) értékei tört számokban adattak: szükséges leszen a' láncztörekek' tulajdonságairól szélesebben szólani, 's a' miket még ez helyen felhozandóknak vélünk, következőkbe foglaljuk:

A. Munkálatok:

1.) Akarmi láncztöreket adott számmal szorozhatunk, ha annak számítóját, vagy ha hozzá, valami külön vált mennyiség tartozik, ezen mennyiséget is, az adott számmal szorozzuk. Ugyan is, legyen a' feladott láncztörek átalánosan:

$$R = Q + a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4 \ldots \text{'stb.}$$

és az adott szorzó $= n$; tévén:

$$\beta_1 = b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4, \ldots \text{'stb. leszen:}$$

$$R = Q + \frac{a_1}{\beta_1} = \frac{Q\beta_1 + a_1}{\beta_1}\text{; tehát: } nR = \frac{nQ\beta_1 + na_1}{\beta_1} = nQ + \frac{na_1}{\beta_1}$$

's β_1-nek elébbi értékét visszahelyhetvén:

$$nR = nQ + \cfrac{na_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 \ldots \text{'stb.}}}} \text{ vagy ha } Q = 0\text{; egyszerüleg: } nR = \cfrac{na_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 \ldots}}}$$

2.) Eloszthatjuk, ha a' láncztörekhez tartozó külön mennyiséget, 's egyszersmind a' láncztörek' nevezőjének első részét (b_1)-et nem különben a' hozzájáruló törek' számítóját (a_2)-őt, az adott számmal szorozzuk. Ugyan is, legyen ismét a' feladott láncztörek általánosan:

$$R = Q + a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + \ldots \text{'stb.}$$

's az adott osztó (n) tévén:

$$\beta_1 = b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4 + \ldots \text{'stb. leszen:}$$

$$\frac{R}{n} = \frac{Q}{n} + \frac{a_1}{n\beta_1}\text{, 's mivel: } \beta_1 = b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + \ldots \text{'stb.}$$

tehát az 1-ső szám szerint:

$n\beta_1 = nb_1 + na_2 : b_2 + a_3 : b_3 + \ldots\ldots$ 'stb.

$$\frac{R}{n} = \frac{Q}{n} + \cfrac{a_1}{nb_1 + \cfrac{na_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b}}}$$ vagy ha $Q=0$; egyszerüleg: $$\frac{R}{n} = \cfrac{a_1}{nb_1 + \cfrac{na_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 \ldots \text{stb.}}}}$$

3.) A' láncztörek' valamellyik $\left(\frac{a_r}{b_r}\right)$-el jegyzett tagának számítója és nevezője, nem különben az után következő tag' számitója (a_{r+1}) ugyan azon számmal szoroztatván vagy osztatván, az által a' törek' értéke nem változik. Ugyan is legyen:

$R = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 + a_4 : b_4 \ldots\ldots$ 'stb. 's tétessék:

$\beta_r = b_r + a_{r+1} : b_{r+1} + a_{r+2} : b_{r+2} \ldots\ldots$ 'stb. leszen:

$R = a_1 : b_1 + a_2 ; b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots\ldots + a_r : \beta_r$

's mivel: $\frac{a_r}{\beta_r} = \frac{na_r}{n\beta_r}$

$R = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots + a_{r-1} : b_{r-1} + na_r : n\beta_r$

tehát a' β_r értékét vissza állitván 1-ső szám szerint:

$R = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots a_{r-1} : b_{r-1} + na_r : nb_r + na_{r-1} : b_{r-1} \ldots$ 'stb.

'S e' tételnél fogva:

a.) Ha a' megnevezett $(a_r;\ b_r;\ a_{r+1})$ három egymás után következő mennyiségek ugyan azon számmal oszthatók, a' láncztörek a' maga értékének változása nélkül, kisebb számokra vétethetik. Például legyen:

$R = 1 : 3 + 6 : 8 + 4 : 9 + 3 : 7$ leszen egyszersmind: $R = 1 : 3 + 3 : 4 + 2 : 9 + 3 : 7$

b.) A' számítóban 's nevezőben előfordulható törekeket kiléptethetjük. Például legyen mint (144 lapon) találtatott

$$R = \frac{2}{3} + \cfrac{1:9}{\frac{2}{3} - \cfrac{1:9}{\frac{2}{3} - \cfrac{1:9}{\frac{2}{3}}}}$$ leszen: $$R = \frac{2}{3} + \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{\frac{2}{3} - \cfrac{1:9}{\frac{2}{3}}}}$$

$$R = \frac{2}{3} + \cfrac{1}{6 - \cfrac{3}{2 - \cfrac{1}{2}}}$$

Nem különben (144 lap) legyen még:

$$R = \frac{3}{5} + \cfrac{1:25}{\frac{-523}{145} + \cfrac{1:841}{\frac{12970}{2059} + \cfrac{1:5041}{\frac{85609}{9301} + \cfrac{1:17161}{\frac{1714}{131}}}}}$$

$$=\frac{3}{5}+\cfrac{1}{\cfrac{-25.523}{145}+\cfrac{25:841}{\cfrac{12970}{2059}+\cfrac{1:5041}{\cfrac{85609}{9301}+\cfrac{1:17161}{1714}}}}$$

és igy a' 3.)-dik szám alatti munkálat' mindenben hasonlatos ismétlésével:

$$R=\frac{3}{5}-\cfrac{145}{25.523+\cfrac{25.145.2059}{841.12970+\cfrac{2059.841.9301}{5041.85609+\cfrac{9301.5041.131}{17161.1714}}}}$$

c.) Az előjegyeket (-1)-el szorozván ellenkezőkre változtathatjuk: Például legyen:

$$R=a_0+\cfrac{a_1}{-b_1+\cfrac{a_2}{b_2}} \quad \text{leszen egyszersmind: } R=a_0-\cfrac{a_1}{b_1-\cfrac{a_2}{b_2}}$$

Nem különben legyen:

$$R=a_0+\cfrac{a_1}{-b_1+\cfrac{a_2}{-b_2+\cfrac{a_3}{-b_3}}} \quad \text{leszen: } R=a_0\cfrac{-a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}}}$$

4.) Ha a' láncztörek' értékét, valami más adott törek' értékével szaporítani vagy fogyasztani akarjuk, legyen:

$R=a_1:b_1+a_2:b_2+a_3:b_3+a_4:b_4\ldots\ldots$ 'stb. 's kerestessék:

$R'=\frac{P}{Q}+a_1:b_1+a_2:b_2+a_3:b_3+\ldots\ldots$ 'stb. tévén:

$\beta_1=b_1+a_2:b_2+a_3:b_3:+a_4:b_4\ldots.$ 'stb találni fogjuk:

$R'=\frac{P}{Q}+\frac{a_1}{\beta_1}$; melly után S-et ismeretlennek vévén fel, tegyük:

$R'=\frac{P}{Q}+\frac{a_1}{\beta_1}=\frac{P}{Q+S}$; honnét közönséges algebrai munkálatok után könnyen találtatik: $S=\frac{-a_1Q^2}{a_1Q+P\beta_1}$

és mivel $P\beta_1=Pb_1+Pa_2:b_2+a_3:b_3+a_4:b_4\ldots.$ 'stb.

innét S-nek és $P\beta_1$-nek értékeit helyettezvén, végezetre:

$$R' = \cfrac{P}{Q\,\cfrac{-a_1Q^2}{a_1Q+Pb_1+\cfrac{Pa_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}\ldots\text{'stb.}}}}$$

5.) A' tagadó jeggyel illetett törekeket ki iktathatjuk következő módon:

Legyen: $R=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4\ldots\text{'stb.}}}}}$'s tegyük: $\beta_3=b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\cfrac{a_5}{b_5\ldots\text{'stb.}}}$,

leszen: $$R=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-\cfrac{a_3}{\beta_3}}}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-1+1-\cfrac{a_3}{\beta_3}}}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-1+\cfrac{\beta_3-a_3}{\beta_3}}}$$

$$=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-1+\cfrac{1}{\cfrac{\beta_3}{\beta_3-a_3}}}}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{a_3}{\beta_3-a_3}}}}$$

következőleg β_3-nek értékét vissza állítván:

$$R=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{a_3}{b_3-a_3+\cfrac{a_4}{b_4\ldots\text{'stb.}}}}}}$$

... egy taggal több az eredeti töreknél, 's benne $\frac{1}{1}$ fordul elő.

6.) Viszont az ollyatén láncztöreket mellyben $\frac{1}{1}$ fordul elő, egy taggal kevesebb ugyan azon értékü láncztörekké lehet változtatni. Ugyan is, legyen ismét:

$R=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{1}{1+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4\ldots\text{'stb.}}}}}}$'s tegyük: $\beta_3=b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\cfrac{a_5}{b_5\ldots\text{'stb.}}}$ leszen:

$$\beta_2=b_2+\cfrac{1}{1+\cfrac{a_3}{\beta_3}}=b_2+\frac{\beta_3}{\beta_3+a_3}=b_2+1-\frac{a_3}{\beta_3}.$$

honnét a' β_2-nek és β_3-nak értékeit helyre állitván:

$$R=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{1}{1+\cfrac{a_3}{b_3\ldots\text{'stb.}}}}}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{\beta_2}}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+1-\cfrac{a_3}{\beta_3}}}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+1-\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4}}}}$$

7.) Az adott láncztöreket kevesebb tagokra igy lehet venni. Legyen:

$$R = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots \text{ stb.}}}} \quad \text{'s tétessék: } R = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\beta_2}} \quad \text{Nem különben:}$$

$$\beta_2 = b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cfrac{a_5}{\beta_5}}} \qquad \beta_5 = b_5 + \cfrac{a_6}{b_6 + \cfrac{a_7}{b_7 + \cfrac{a_8}{\beta_8}}} \qquad \beta_8 = b_8 + \cfrac{a_9}{b_9 + \cfrac{a_{10}}{b_{10} + \cfrac{a_{11}}{b_{11} \dots \text{'stb.}}}}$$

valóságos osztás eszközöltetvén leszen:

$$R = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\beta_2}} = \frac{a_1}{b_1} \quad \frac{-a_1 a_2}{b_1 a_2 + b_1 b_1 \beta_2}; \text{ és mivel: } b_1 b_1 \beta_2 = b_1 b_1 b_2 + \cfrac{b_1 b_1 a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cfrac{a_5}{\beta_5}}}$$

$$\text{mellyben: } \cfrac{a_4}{b_4 + \cfrac{a_5}{\beta_5}} \text{ valóságos osztással találtatik: } = \frac{a_4}{b_4} \quad \frac{-a_4 a_5}{a_5 b_4 + b_4 b_4 \beta_5}$$

$$\text{nem különben: } b_4 b_4 \beta_5 = b_4 b_4 b_5 + \cfrac{b_4 b_4 a_6}{b_6 + \cfrac{a_7}{b_7 + \cfrac{a_8}{\beta_8}}} \quad \text{mellyben hasonlag:}$$

$$\cfrac{a_7}{b_7 + \cfrac{a_8}{\beta_8}} = \frac{a_7}{b_7} \quad \frac{-a_7 a_8}{a_8 b_7 + b_7 b_7 \beta_8} \quad \text{és így a' talált értékek' helyre}$$

tételével akármeddig folytatva:

$$R = \frac{a_1}{b_1} - \cfrac{a_1 a_2}{a_2 b_1 + b_1 b_1 b_2 + \cfrac{b_1 b_1 a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4} - \cfrac{a_4 a_5}{a_5 b_4 + b_4 b_4 b_5 + \cfrac{b_4 b_4 a_6}{b_6 + \cfrac{a_7}{b_7} \quad \cfrac{-a_7 a_8}{a_8 b_7 + b_7 b_7 \beta_8}}}}}$$

az az:

$$R = \frac{a_1}{b_1} \quad \cfrac{-a_1 a_2}{a_2 b_1 + b_1 b_1 b_2 + \cfrac{b_1 b_1 a_3}{\cfrac{b_3 b_4 + a_4}{b_4}} \quad \cfrac{-a_4 a_5}{a_5 b_4 + b_4 b_4 b_5 + \cfrac{b_4 b_4 a_6}{\cfrac{b_6 b_7 + a_7}{b_7}} \quad \cfrac{-a_7 a_8}{a_8 b_7 + b_7 b_7 \beta_8}}}$$

és a' (146 lap 3.) szám b.) szerint végezetre:

$$R=\frac{a_1}{b_1}\;\frac{-a_1a_2}{a_2b_1+b_1b_1b_2+\frac{b_1b_1a_3b_4}{b_3b_4+a_4\;\frac{-a_4a_5b_4}{a_5b_4+b_4b_4b_5+\frac{b_4b_4a_6b_7}{b_6b_7+a_7\;\frac{-a_7a_8b_7}{a_8b_7+b_7b_7\beta_8}}}}}$$

Például legyen:

$a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=3$: $a_4=4$ .... 'stb.

$b_1=b_2=b_3=b_4$ ...... stb. $=1$

tehát a' feladott láncztörek:

$R=1:1+2:1+3:1+4:1+5:1+\dots$ 'stb. leszen egyszersmind:

$R=1:1-1.2:3+3:5-4.5:6+6:8-7.8:9+\dots$ 'stb.

8.) Két közelitő törekek, ugymint: $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}$ és $\frac{M_n}{N_n}$ közé, megkivántató számu törekeket igy lehet be iktatni:

Minthogy mindenféle számítóju és nevezőjü láncztörekek, több vagy kevesebb tagainak öszveszámított értékei, a' legnagyobb közös osztó kereséséhez hasonló bánással egységet tevő számítókra vétethetnek, ezen esetben pedig lévén a_1; a_2; a_3...'stb. $=1$; mellynél fogva valamellyik közelitő törek

$$\frac{M_n}{N_n}=\frac{rM_{n-1}+M_{n-2}}{rN_{n-1}+N_{n-2}}\text{ (129 lap) tegyük fel: }\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}>\frac{M_n}{N_n}\text{ tehát: }\frac{M_{n-2}}{N_{n-2}}<\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}\text{ (129 l.)}$$

honnét:

a.) $M_{n-1}N_n-M_nN_{n-1}=+1$ és b.) $M_{n-2}N_{n-1}=M_{n-1}N_{n-2}=-1$

nevezzük a' közbe iktatandó törekeket:

$\frac{m_1}{n_1}$; $\frac{m_2}{n_2}$; $\frac{m_3}{n_3}$; $\frac{m_4}{n_4}$; $\frac{m_5}{m_6}$; ..... 'stb. 's tegyük illetőleg:

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{M_{n-1}+M_{n-2}}{N_{n-1}+N_{n-2}};\quad\frac{m_2}{n_2}=\frac{2M_{n-1}+M_{n-2}}{2N_{n-1}+N_{n-2}};\quad\frac{m_3}{n_3}=\frac{3M_{n-1}+M_{n-2}}{3N_{n-1}+N_{n-2}};\dots\text{ 'stb.}$$

leszen:

$$\frac{m_{r-1}}{n_{r-1}}-\frac{M_n}{N_n}=\frac{(r-1)M_{n-1}+M_{n-2}}{(r-1)N_{n-1}+N_{n-2}}-\frac{rM_{n-1}+M_{n-2}}{rN_{n-1}+N_{n-2}}$$

mellyből egyenlő nevezőre vonva; 's a' közös nevezőben $(rN_{n-1}+N_{n-2})$-nek elébbi értékét $=N_n$ vissza helyhetve:

$$\text{b.)}\quad\frac{m_{r-1}}{n_{r-1}}-\frac{M_n}{N_n}=\frac{M_{n-2}N_{n-1}-M_{n-1}N_{n-2}}{[(r-1)N_{n-1}+N_{n-2}]N_n}=\frac{-1}{[(r-1)N_{n-1}+N_{n-2}]N_n}$$

továbbá: $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{M_n}{N_n} = \frac{M_{n-1}N_n - M_n N_{n-1}}{N_{n-1}N_n} = \frac{1}{N_{n-1}N_n}$ (8. a.)

következőleg: $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{M_n}{N_n} > \frac{m_{r-1}}{n_{r-1}} - \frac{M_n}{N_n}$ vagy is:

$\frac{m_{r-1}}{n_{r-1}}$ az $\frac{M_n}{N_n}$-hez inkább közelit, az adott $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}$-nél.

mivel pedig ahoz képest a' mint előbocsátottuk:

$$\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{M_{n-1}+M_{n-2}}{N_{n-1}+N_{n-2}} = \frac{M_{n-1}N_{n-2} - M_{n-2}N_{n-2}}{[N_{n-1}+N_{n-2}]N_{n-1}} = \frac{1}{[N_{n-1}+N_{n-2}]N_{n-1}}$$

$$\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{m_2}{n_2} = \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{2M_{n-1}+M_{n-2}}{2N_{n-1}+N_{n-2}} = \frac{M_{n-1}N_{n-2} - M_{n-2}N_{n-2}}{[2N_{n-1}+N_{n-2}]N_{n-1}} = \frac{1}{[2N_{n-1}+N_{n-2}]N_{n-1}}$$

$$\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{m_3}{n_3} = \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{3M_{n-1}+M_{n-2}}{3N_{n-1}+N_{n-2}} = \frac{M_{n-1}N_{n-2} - M_{n-2}N_{n-2}}{[3N_{n-1}+N_{n-2}]N_{n-1}} = \frac{1}{[3N_{n-1}+N_{n-2}]N_{n-1}}$$

. . . .

tehát:

$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$; $\frac{m_2}{n_2} < \frac{m_3}{n_3}$; $\frac{m_3}{n_3} < \frac{m_4}{n_4} \ldots\ldots \frac{m_{r-1}}{n_{r-1}} < \frac{M_n}{N_n}$ lévén: 's az adott egyenletekből $\frac{m_1}{n_1}; \frac{m_2}{n_2}; \frac{m_3}{n_3} \ldots \frac{m_{r-1}}{n_{r-1}}$ értékei meghatároztatván, az $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}$ és $\frac{M_n}{N_n}$ törekek közé $(r-1)$ számu és az $\frac{M_n}{N_n}$-hez mind inkább közelitő törekek iktattathatnak. Mindenben hasonlatos lehozatok találván pedig helyet azon esetben is, midőn $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} < \frac{M_n}{N_n}$; az elébbiek ismételt alkalmazását feleslegesnek tarthatjuk.

Például legyen:

1.) $R = 2 + 1 : 5 + 1 : 4 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 10$ mellyben:

$$\frac{M_{n-2}}{N_{n-2}} = \frac{103}{47}; \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{355}{162}; \frac{M_n}{N_n} = \frac{10M_{n-1}+M_{n-2}}{10N_{n-1}+N_{n-2}} = \frac{10.355+103}{10.162+47} = \frac{3653}{1667}$$

tehát lévén $r = 10$ a' $\frac{355}{162}$ és $\frac{3653}{1667}$ törekek közé $(r-1)$ számu az az: 9 közelitő töreket iktathatunk, volnának pedig azok:

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{355+103}{162+47}=\frac{458}{209};\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{2.355+103}{2.162+47}=\frac{813}{371}$$

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{3.355+103}{3.162+47}=\frac{1168}{533};\quad \frac{m_4}{n_4}=\frac{4.355+103}{4.162+47};\quad \frac{m_5}{n_5}=\frac{5.355+103}{5.162+47}$$

$$\frac{m_6}{n_6}=\frac{6.355+103}{6.162+47}\cdots\cdots\cdots\frac{m_9}{n_9}=\frac{9.355+103}{9.162+47}=\frac{3298}{1505}$$

B.) Származásuk 's tulajdonságaik:

1.) Valamint fentebb, azon láncztörekek' származásáról mellyekben az a_1; a_2; a_3.... a_n-el jegyzett számítók folyvást egységet tesznek, rövideden eddig is emlékeztünk: hasonlatosképen egyéb láncztörekekre nézve is, azoknak bővebb ismertetésére és felvilágosítására tartozand ha származásukról átalánosabban fogunk szólani. Mire nézve legyen valami feladott törek:

a.) $R=\frac{M}{N}=\frac{a_1}{b_1+\frac{a_2}{\beta_2}}=\frac{a_1\beta_2}{b_1\beta_2+a_2}$ leszen: $\beta_2=\frac{Ma_2}{Na_1-Mb_1}$

minél fogva a' β_2 meghatározására, az: a_1; a_2; b_2 szabadon felvétethető mennyiségek lévén; tegyük a' megállapított felvételekhez képest:

$$Ma_2=M';\ Na_1-Mb_1=N' \text{ és } \beta_2=\frac{M'}{N'}=b_2+\frac{a_3}{\beta_3}$$

leszen ismét: $\frac{M'}{N'}=\frac{b_2\beta_3+a_3}{\beta_3}$ honnét: $\beta_3=\frac{N'a_3}{M'-N'b_2}$

és mivel itt is a' β_3 meghatározására a_3 's b_2 szabadon felvételhető mennyiségek; tegyük ismét a' megállapított felvételekhez képest:

$$N'a_3=M'';\ M'-N'b_2=N'' \text{ és } \beta_3=\frac{M''}{N''}=b_3+\frac{a_4}{\beta_4}$$

találni fogjuk: $\frac{M''}{N''}=\frac{b_3\beta_4+a_4}{\beta_4}$ mellyből: $\beta_4=\frac{N''a_4}{M''-N''b_3}$

's a' hasonlato munkálat' akarmeddig folytatásával:

$$\beta_5=\frac{N'''a_5}{M'''-N'''b_4};\quad \beta_6=\frac{N''''a_6}{M''''-N''''b_5}\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\beta_n=\frac{N^{(n-2)'}a_n}{M^{(n-2)'}-N^{(n-2)'}b_{n-1}};\quad \beta_{n+1}=\frac{N^{(n-1)'}a_{n+1}}{M^{(n-1)'}-N^{(n-1)'}b_n}$$

mellyek szerint midőn: $M^{(n-1)'}-N^{(n-1)'}b_n=0$; ahoz képest egyszersmind $\frac{a_{n+1}}{\beta_{n+1}}=0$

tartozván lenni; azontul a' tagok tovább nem folytattathatnak: 's ez esetben a' lánczlöreknek valahol meg kell szakadni, vagy is, véges számu tagokbol állani.

Származtatásuk pedig:

Számitók: $M' = Ma_2$; $M'' = N'a_3$; $M''' = N''a_4$; $M^{IV} = N'''a_5$...... 'stb.

Nevezők: $N' = Na_1 - Mb_1$; $N'' = M' - N'b_2$; $N''' = M'' - N''b_3$; $N'''' = M''' - N'''b_4$....'stb.

Például:

a.) Azon feltétellel, hogy $a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 1$; azonkivül $\frac{M}{N}$; $\frac{M'}{N'}$; $\frac{M''}{N''}$... 'stb. folyvást állitó legyen, 's lehetőleg legkisebb számokban adassék, tegyük:

$$R = \frac{M}{N} = \frac{319}{1667} = 1 : b_1 + 1 : b_2 + 1 : b_3 + 1 : b_4 ..... \text{'stb.}$$

's előadott módon és a' feltételeknek megfelelőképen } az { M'; M''; M'''; M''''.... 'stb. N'; N''; N'''; N''''.... 'stb. } értékeit, egymásután leszármaztatván:

$$M' = Ma_2 \quad = M = 319$$

$$N' = Na_1 - Mb_1 = N - Mb_1 = 1667 - 319b_1$$

melly szerint, hogy N' a' kivánt feltételnek megfelelőképen vétethessék, b_1-nek az egész számokban lehető legnagyobb érték adatván, hogy a' mellett legyen $1667 > 319b_1$; ehez képest $\frac{1667}{319}$-nek, legnagyobb egész szám hanyadosát kell vennünk; 's leszen:

$$b_1 = 5;\ M' = M = 319;\ N = N - Mb_1 = 1667 - 319.5 = 72$$

Ennél fogva tétetvén:

$\frac{M'}{N'} = \frac{319}{72}$ leszen ujra:

$$M'' = N'a_3 = N' = 72$$

$$N'' = M' - N'b_2 = 319 - 72b_2$$

melly szerint, hogy N'' ismét a' kivánt feltételnek megfelelőképen vétethessék, b_2-nek, szintúgy mint fentebb, az egész számokban lehető legnagyobb érték adatván, hogy a' mellett legyen $319 > 72b_2$; ehez képest $\frac{319}{72}$-nek, legnagyobb egész szám hanyadosát kell vennünk; 's leszen:

$$b_2 = 4;\ M'' = N'a_3 = N' = 72;\ N'' = M' - N'b_2 = 319 - 72.4 = 31$$

tehát ismét tétetvén:

$\frac{M''}{N''} = \frac{72}{31}$ találni fogjuk ugyan azon munkálat' megújitásával egymás után:

$\frac{M'''}{N'''}=\frac{31}{72-31b_3}$ mellyből: $b_3=2$; $\frac{M''''}{N''''}=\frac{10}{31-10b_4}$ mellyből: $b_4=3$;

$\frac{M'''''}{N'''''}=\frac{1}{10-b_5}$'s végezetre: $b_5=10$ és:

$$R=\frac{319}{1667}=1:5+1:4+1:2+1:3+1:10$$

honnét látnivalóképen: az adott közönséges $\frac{M}{N}$ töreknek, ollyatén láncztörekké változtatása, hogy a' számítók folyvást állító egységet tegyenek, az $\frac{M'}{N'}$; $\frac{M''}{N''}$; $\frac{M'''}{N'''}$.. 'stb. törekek pedig, szintúgy folyvást állítóknak maradván, a' lehető legkisebb számok által adassanak: mint már fentebb (129 lap) mondottuk, a' legnagyobb közosztó kereséséhez mindenben hasonló munkálatok által eszközöltetik.

b.) Ugyan ezen példában, olly feltétellel hogy $a_1=a_2=a_3\ldots=a_n=1$; azonkivül b_2; b_3; $b_4\ldots b_n$ folyvást tagadó legyen, 's végezetre $\frac{M'}{N'}$; $\frac{M''}{N''}$; $\frac{M'''}{N'''}$... 'stb. legkisebb számok által adassanak, tegyük:

$$R=\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}=a_1:b_1+a_2:-b_2+a_3:-b_3+\ldots\ldots \text{'stb.}$$

előadott módon 's a' feltételeknek megfelelőképen az:

$$M';\ M'';\ M''';\ M''''\ldots\ldots \text{'stb.}$$
$$N';\ N'';\ N''';\ N''''\ldots\ldots \text{'stb.}$$

értékeit egymásután leszármaztatván, leszen:

$$\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}$$

$$\frac{M'}{N'}=\frac{Ma_2}{Na_1-Mb_1}=\frac{319}{1667-319b_1}\ (b_1=6)=\frac{319}{-247}$$

$$\frac{M''}{N''}=\frac{N'a_3}{M'-N'b_2}=\frac{-247}{319-247b_2}\ (b_2=1)=\frac{-247}{72}$$

$$\frac{M'''}{N'''}=\frac{N''a_4}{M''-N''b_3}=\frac{72}{-247+72b_3}(b_3=2)=\frac{72}{-31}$$

$$\frac{M''''}{N''''}=\frac{N'''a_5}{M'''-N'''b_4}=\frac{-31}{72-31b_4}\ (b_4=2)=\frac{-31}{10}$$

$$\frac{M^{V}}{N^{V}} = \frac{N^{IV}ab}{M^{IV} - N^{IV}b_5} = \frac{-31}{72 + 10b_5}; (b_5 = 3) = \frac{10}{-1}$$

$$\frac{M^{VI}}{N^{VI}} = \frac{N^{V}a^{7}}{M^{V} - N^{V}b_6} = \frac{-1}{10 - b_6}; (b_6 = 10) = \frac{-1}{0}$$

minél fogva a' törek megszakadván (153 lap.)

$$R = \frac{319}{1667} = 1:6 + 1:-1 + 1:-3 + 1:-2 + 1:-3 + 1:-10$$

mellyből; hogy az adott töreknek folytanossá változtatása ismét a' legnagyobb közosztó kereséséhez hasonló munkálattal eszközöltetik, magában világos.

c.) Ha kivántatik hogy legyen, $a_2 = a_3 = a_4 \ldots = a_n = -1$; következő származtatások fognak helyet találni:

$$\frac{M}{N} = \frac{319}{1667}$$

$$\frac{M'}{N'} = \frac{Ma_2}{Na_1 - Mb_1} (b_1 = 6) = \frac{-319}{1667 - 319b_1} = \frac{319}{247}$$

$$\frac{M''}{N''} = \frac{N'a_3}{M' - N'b_2} (b_2 = 2) = \frac{-247}{319 - 247b_2} = \frac{247}{175}$$

$$\frac{M'''}{N'''} = \frac{N''a_4}{M' - N''b_3} (b_3 = 2) = \frac{-175}{247 - 175b_3} = \frac{175}{103}$$

$$\frac{M^{IV}}{N^{IV}} = \frac{N'''a_5}{M''' - N'''b_4} (b_4 = 2) = \frac{-103}{175 - 103b_3} = \frac{103}{31}$$

$$\frac{M^{V}}{N^{V}} = \frac{N^{IV}a_5}{M^{IV} - N^{IV}b_5} (b_5 = 4) = \frac{-31}{103 - 31b^{5}} = \frac{31}{21}$$

$$\frac{M^{VI}}{N^{III}} = \frac{N^{IV}a_7}{M^{V} - N^{V}b_6} (b_6 = 2) = \frac{-21}{31 - 21b_6} = \frac{21}{11}$$

$$\frac{M^{VII}}{N^{VII}} = \frac{N^{VI}a_8}{M^{VI} - N^{VI}b_7} (b_7 = 2) = \frac{-11}{21 - 11b_7} = \frac{11}{1}$$

's végezetre:

$$\frac{M}{N} = R = \frac{319}{1667} = 1:6 - 1:2 - 1:2 - 1:2 - 1:4 - 1:2 - 1:2 - 1:11.$$

d.) Egyébiránt minden folytonos törekek' származására átalánosan meg kell jegyzenünk; hogy ha az eredeti töreknek melly legyen $= \frac{M}{N}$; számitóját, valami szabadon felvett mennyiséggel szaporítván vagy fogyasztván, mind e' mellett az eredeti törek' értékét megtartatni kivanjuk; ezen egyenletnek kell eleget tennünk:

$$\frac{M+k}{\beta_1}=\frac{M}{N} \text{ mellyből: } \beta_1=N+\frac{Nk}{M}$$

's (k)nak mind azon értékeivel mi szerint Nk az M-el tökéletesen osztható ne legyen; tévén $M+k=a_1$; az eredeti törekkel egyenlő értékü töreknek hasonló formát kell felvennie:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}$$

Melly észrevétel minden további $\frac{a_2}{b_2}$; $\frac{a_3}{b_3}\ldots\ldots\frac{a_n}{b_n}$; tagokra kiterjedvén, az eléadotthoz mindenben hasonlatos munkálatok' ismételt megújításával, valamelly adott töreket a' (k)-nak felvett értékeihez képest, határozatlanul sokféle, ugyan azon értékü folytonos törekké lehet általváltoztatni. Például legyen:

$\alpha.)$ $\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}$; $k=1$ leszen $a_1=320$; $\beta_1=1667+\frac{1667}{319}=1672+\frac{72}{319}$

$$\text{mellyből: } \frac{319}{1667}=\cfrac{320}{1672+\cfrac{72}{319}} \text{ továbbá:}$$

tegyük ismét: $\frac{a_2}{b_2}=\frac{72}{319}$; $k=1$; leszen $a_1'=73$; $\beta_2=319+\frac{319}{72}=322+\frac{31}{72}$

$$\text{mellyből: } \frac{319}{1667}=\cfrac{320}{1672+\cfrac{73}{323+\cfrac{31}{72}}}$$

a' tagoknak további folytatása magában szembetünő lévén.

$\beta.)$ $\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}$; $k=-318$; leszen: $a_1=1$; $\beta_1=1667-\frac{318.1667}{319}$ az az:

$$\beta_1=\frac{(319-318)\,1667}{319}=\frac{1667}{319}=5+\frac{72}{319}$$

$$\text{tehát: } \frac{319}{1667}=\cfrac{1}{5+\cfrac{72}{319}} \text{ tegyük,}$$

továbbá: $\frac{a_2}{b_2}=\frac{72}{319}$; $k=-71$ leszen: $a_1'=1$; $\beta_2=319\ \frac{-71.319}{72}$ az az:

$$\beta_2=\frac{(72-71)319}{72}=\frac{319}{72}=4+\frac{31}{72}$$

és: $\frac{319}{1667}=1:5+1:4+31:72$'s tovább folytatva:

$$\frac{319}{1667}=1:5+1:4+1:2+1:3+1:10.$$

γ.) Tételvén $k=-318$ leszen: $a_1=1$; $\beta=6\ \frac{-247}{319}$

$\frac{a_2}{b_2}=\frac{-247}{319}$; $k=248$; leszen: $a_2'=1$; $\beta_2=\frac{(247-248)319}{247}=-1\ \frac{-72}{247}$

tehát: $\frac{319}{1667}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{-1\ -\frac{72}{247}}}$ tegyük:

továbbá: $\frac{a_3}{b_3}=\frac{-72}{247}$; $k=73$ leszen: $a_3'=1$; $\beta_3=\frac{(72-73)247}{72}=-3\ \frac{-31}{72}$

és igy tovább folytatva:

$$\frac{319}{1667}=1:6+1:-1+1:-3+1:-2+1:-3+1:-10$$

δ.) Mindenekben hasonlatosképen ha tesszük:

$\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}$; $k=-318$; $a_1=1$; $\beta_1=\frac{(319-318)1667}{319}=6\ \frac{-247}{319}$

$\frac{a_2}{b_2}=-\frac{247}{319}$; $k=246$ leszen $a_2=-1$; $\beta_2=\frac{(246-247)319}{247}=2\ \frac{-175}{247}$

mellyből $\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}=1:6-1:2-175:247$

's tovább folytatva:

$$\frac{M}{N}=\frac{319}{1667}=1:6-1:2-1:2-1:2-1:4-1:2-1:2-1:11$$

mint ezen három utóbbiakat a' (130 lapon) előadott felosztáshoz képest már a' fentebbiekben is (155 lap) azonképen találtuk.

2.) Mind ezeknél fogva pedig, valamelly adott töreket határozatlanul sokféle egyenlő értékü folytonos törekké lehetséges lévén általváltoztatni: kérdhetjük viszont, ha vajjon azok átalánosan mindnyájan azon tulajdonsággal birnak-e, miszerint több több tagok' öszveszámitásával az eredeti törek' igaz értékéhez mind inkább közelítenek. Erre nézve:

Tegyük fel hogy minden előforduló a_1; a_2; $a_3 \dots a_n$ nem különben: b_1; b_2; $b_3 \dots b_n$ mennyiségek állítók legyenek; mivel a' fentebbiek szerint: (27 lap.)

$$\frac{M_n}{N_n}=\frac{M_{n-1}b_n+M_{n-2}a_n}{N_{n-1}b_n+N_{n-2}a_n}$$

's ezen kitételben minden előforduló mennyiségek állítók, következik: hogy (n)nek akarmi értékével az $\frac{M_n}{N_n}$-el jegyzett törek is állító legyen. Mivel továbbá az (n)-nek egymásutáni értékeivel:

$$\frac{M_1}{N_1}-\frac{M_2}{N_2}=\frac{M_1N_2-M_2N_1}{N_1N_2}=\frac{M_1(a_2+N_1b_2)-M_1N_1b_2}{N_1N_2}$$

$$=\frac{M_1a_2}{N_1N_2}=\frac{a_1a_2}{N_1N_2}$$

$$\frac{M_2}{N_2}-\frac{M_3}{N_3}=\frac{M_2N_3-M_3N_2}{N_2N_3}=\frac{M_2(N_1a_3+N_2b_3)-N_2(M_1a_3+M_2b_3)}{N_2N_3}$$

$$=\frac{(M_2N_1-M_1N_2)}{N_2N_3}a_3=\frac{-a_1a_2a_3}{N_2N_3}$$

$$\frac{M_3}{N_3}-\frac{M_4}{N_4}=\frac{M_3N_4-M_4N_3}{N_3N_4}=\frac{M_3(N_2a_4+N_3b_4)-N_3(M_2a_4+M_3b_4)}{N_3N_4}$$

$$=\frac{(M_3N_2-M_2N_3)}{N_3N_4}a_4=\frac{a_1a_2a_3a_4}{N_3N_4}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}-\frac{M_n}{N_n}=\frac{\pm a_1a_2a_3\dots a_n}{N_{n-1}N_n}$$

$$\frac{M_n}{N_n}-\frac{M_{n+1}}{N_{n+1}}=\frac{\mp a_1a_2a_3\dots a_{n+1}}{N_nN_{n+1}}$$

's ezen lehozatokbol következik:

a.) Hogy az előrebocsátott feltételek alatt, az egymásutáni külzéseknek váltogatva hol állítókká, hol tagadókká kell válniok, 's igy a' több több öszveszámított tagok' értéke az eredeti törek' értékénél hol kisebb hol nagyobb tartozik lenni.

Mivel továbbá arra nézve, hogy több több tagok' öszveszámításával az igaz értékhez mind inkább közelítsünk, mulhatlanul megkivántatik:

$$\frac{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n}{N_{n-1} N_n} > \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n+1}}{N_n N_{n+1}} \text{ az az: hogy}$$

$$\frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n) N_n N_{n+1} - (a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n+1}) N_{n-1} N_n}{N_{n-1} N_n N_n N_{n+1}}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n)}{N_n} \cdot \frac{(N_{n+1} - N_{n-1} a_{n+1})}{N_{n-1} N_{n+1}}$$

állító legyen. Ehez képest $N_{n+1} = N_{n-1} a_{n+1} + N_n b_{n+1}$ helyettezésével $\frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_2)\, b_{n+1}}{N_{n-1} N_{n+1}}$ tagadhatatlanul mindenkor állító lévén:

b.) Az előbocsátott feltételek alatt, nem különben igaz leszen, hogy: a' folytonos törek' több több összeszámított tagainak egymástoli külzése mind inkább fogyatkozik, következőleg azoknak értéke az igazhoz mind inkább közelít. Mellyek után:

c.) Mind azokra nézve mellyekben tagadó mennyiségek is fordulnak elő, ha ezeket a' (148 lapon) mondottaknál fogva ki lehet iktatni, a' legközelebbiekben kifejtett ismertetményeket ahoz képest alkalmazhatni.

3.) Kifejtettük ugyan mingyárt eleintén (128 lap.) hogy a' közelitő törekeket egymás után, 's igy a' folytonos törek egész, vagy legalább az adott tagig kiszámított értékét miképen lehessen feltalálni: ha mindazáltal az egymásutáni közelitő törekek nem kivántatnak, a' kérdés feloldását könnyebben eszközölhetjük következő módon:

$$\text{Legyen } \frac{M}{N} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots\ldots \cfrac{a_{n-2}}{b_{n-2} + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

mindeneknek előtte magában látható, hogy az utolsó nevezőben, a' törek kiiktatásával leszen egyszersmind:

$$\frac{M}{N}=a_1:b_1+a_2:b_2\ldots\ldots+a_{n-2}:b_{n-2}+a_{n-1}b_n:b_n\,b_{n-1}+a_n$$

mellyben tétetvén $b_n=\beta_n$; $b_n\,b_{n-1}+a_n=\beta_{n-1}$ találni fogjuk:

$$\frac{M}{N}=a_1:b_1+a_2:b_2\ldots+a_{n-2}:b_{n-2}+a_{n-1}\beta_n:\beta_{n-1}$$

honnét az utolsó töreket ismét kiiktatván:

$$\frac{M}{N}=a_1:b_1+a_2:b_2\ldots\ldots a_{n-3}:b_{n-3}+a_{n-2}\beta_{n-1}:b_{n-2}\beta_{n-1}+a_{n-1}\beta_n$$

's tétetvén $b_{n-2}\beta_{n-1}+a_{n-1}\beta_n=\beta_{n-2}$ leszen:

$$\frac{M}{N}=a_1:b_1+a_2:b_2\ldots\ldots+a_{n-3}:b_{n-3}+a_{n-2}\beta_{n-1}:\beta_{n-2}$$

melly munkálatok' akarmeddigi tovább folytatásából, a' származtatásnak következő törvénye világos:

$$\begin{aligned}
\beta_n &= b_n\\
\beta_{n-1} &= \beta_n b_{n-1}+a_n\\
\beta_{n-2} &= \beta_{n-1}b_{n-2}+a_{n-1}\beta_n\\
\beta_{n-3} &= \beta_{n-2}b_{n-3}+a_{n-2}\beta_{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\beta_2 &= \beta_3\,b_2+a_3\beta_4\\
\beta_1 &= \beta_2\,b_1+a_2\beta_3
\end{aligned}$$

honnét a' törek' értéke $\frac{M}{N}=\frac{a_1\beta_2}{\beta_1}$'s legyen ismét:

Például: $\frac{M}{N}=1:6-1:2-1:2-1:2-1:4-1:2-1:2-1:11$

leszen a' legközelebbi lehozatok szerint:

$$\begin{aligned}
\beta_8 &= b_8\ldots\ldots\ldots && = 11\\
\beta_7 &= \beta_8 b_7+a_8 &= 11.2-1 & = 21\\
\beta_6 &= \beta_7 b_6+a\,\beta_8 &= 21.2-11 & = 31\\
\beta_5 &= \beta_6 b_5+a_6\beta_7 &= 31.4-21 & = 103\\
\beta_4 &= \beta_5 b_4+a_5\beta_6 &= 103.2-31 & = 175\\
\beta_3 &= \beta_4 b_3+a_4\beta_5 &= 175.2-103 & = 247\\
\beta_2 &= \beta_3 b_2+a_3\beta_4 &= 247.2-175 & = 319\\
\beta_1 &= \beta_2 b_1+a_2\beta_3 &= 319.6-247 & = 1667
\end{aligned}$$

tehát:

$$\frac{M}{N}=\frac{a_1\beta_2}{\beta_1}=\frac{319}{1667}$$

C.) Kerületesek vagy fordulatosok (periodicae)

A' folytonos törekeknek még egy neméről kell különösebben emlékeznünk, melly kerületesnek vagy fordulatosnak neveztetik; 's benne egymásután ugyan annyi számu 's ugyan azon tagok kerülnek vagy fordulnak elő, 's ugyan azon rendel végetlenül folytattatnak.

Például: a_1; a_2; a_3; nem különben b_1; b_2; b_3-nak mindig ugyan azon értékeivel:

$$\frac{M}{N} = a_1:b_1 + a_2:b_2 + a_3:b_3 + a_1:b_1 + a_2:b_2 + a_3:b_3 + \ldots\ldots \text{ végetlenig}$$

a' mondott tulajdonságért kerületes vagy fordulatos.

1.) Ezekre nézve a' fentebbiekben előadott átalános tanítmányok szintén alkalmazhatók lévén, csak annyit leszen szükség megjegyeznünk, hogy: az illyenek' értékét mindig valamelly 2-dik emeletü egyenlet gyökere alakjában lehet elő állítani, 's viszont akarmellyik második emeletü egyenlet' gyökerét kerületes láncz törek által kitenni. Ugyan is legyen:

$$\frac{M}{N} = x = a_1:b_1 + a_2:b_2 + a_3:b_3 \ldots\ldots + a_n:b_n$$

mellyben: $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n$'s szintúgy $b_1 = b_2 = b_3 \ldots = b_n$

Mivel (n)-nek végetlen értékével $n = n-1 = \infty$; kell lenni egyszersmind:

$$x = a_1:b_1 + a_2:b_2 + a_3:b_3 + a_4:b_4 \ldots\ldots + a_n \;:b_n$$
$$x = a_1:b_1 + a_2:b_2 + a_3:b_3 + a_4:b_4 \ldots\ldots + a_{n-1}:b_{n-1}$$
$$x = a_2:b_2 + a_3:b_3 + a_4:b_4 \ldots\ldots + a_n \;:b_n$$

az az: $x = \dfrac{a_1}{b_1 + x}$ következőleg: $x^2 + b_1 x = a_1$ honnét:

$$x = \pm\sqrt{a_1 + \tfrac{1}{4}b_1^2)} - \tfrac{1}{2}b_1 \text{ 's végezetre:}$$

$$\pm\sqrt{a_1 + \tfrac{1}{4}b_1^2)} - \tfrac{1}{2}b_1 = a_1:b_1 + a_1:b_1 + a_1:b_1 \ldots\ldots \text{végetlenig.}$$

Például: legyen $x = 1:2 + 1:2 + 1:2 + 1:2 \ldots\ldots$ végetlenig leszen: $\pm\sqrt{a_1 + \tfrac{1}{4}b_1^2)} - \tfrac{1}{2}b_1 = \pm\sqrt{1+1)} - 1 = \sqrt{2)} - 1 = x$ tehát:

$$\pm\sqrt{2)} - 1 = 1:2 + 1:2 + 1:2 + 1:2 + 1:2 \ldots\ldots \text{végetlenig}$$

$$\sqrt{2} = 1 + 1:2 + 1:2 + 1:2 + 1:2 + 1:2 \ldots\ldots \text{végetlenig}$$

és valóban találtatik: $\sqrt{2} = 1{,}41421 \ldots$

A' (160 lapon) előadottak szerint pedig a' folytonos törek' 5 első tagainak értéke $= \dfrac{29}{70}$ honnét: $1 + \dfrac{29}{70} = \dfrac{99}{70} = 1{,}41428 > 1{,}41421$

Ellenben a' 6 első tag értéke $= \dfrac{70}{169}$ honnét $1 + \dfrac{70}{169} = \dfrac{239}{169} = 1{,}4142 < 1{,}41421$

Hasonlatosképen egyebekre nézve, mellyeknek fordulata nem mingyárt eleintén, hanem későbben az r-dik tagon kezdődik (n)-nek végetlen (r)-nek véges értékével mindenkor igaznak kell maradni:

$$x = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots\ldots + a_n \; : b_n$$
$$x = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots\ldots + a_{n-r} : b_{n-r}$$
$$x = a_r : b_r + a_{r+1} : b_{r+1} + a_{r+2} : b_{r+2} \ldots\ldots\ldots + a_n \; : b_n$$

az az: $x = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots a_r : b_r + x$

tétetvén pedig $b_r + x = \beta_r$

minthogy az elébbi lehozatoknál fogva:

$$\beta_r \; = b_r + x$$
$$\beta_{r-1} = \beta_r b_{r-1} + a_r$$
$$\beta_{r-2} = \beta_{r-1} b_{r-2} + a_{r-1}\beta_r$$
$$\beta_{r-3} = \beta_{r-2} b_{r-3} + a_{r-2}\beta_{r-1}$$

's igy β_r-ben az (x)-nek első hatványa fordul elő; melly β_{r-1}-ben felebb nem emelkedhetik, 's ugyan azon oknál fogva, sem β_{r-2}; sem $\beta_{r-3} \ldots\ldots$ sem β_2; sem β_1-ben az (x) magasabb hatványra nem hághatván: minden fordulatos törekeknek általános formája:

$$x = \frac{a_1 \beta_2}{\beta_1} = \frac{M + Nx}{P + Qx}$$; 's ezen forma is, valamint az elébbi, mindig második emeletü egyenletre vezet.

Nem különben ha nehány első tagok fordulatot nem tesznek, 's a' törek csak későbben azon tagok után válik fordulatossá; leszen

$x = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 + a_3 : b_3 \ldots\ldots\ldots + a_r : b_r + a_{r+1} : b_{r+1} \ldots\ldots$ végetlenig

mellyben ha az (r)-dik tagon kezdvén a' törek fordulatossá válik,

legyen $y = a_{r+1} : b_{r+1} + a_{r+2} : b_{r+2} + a_{r+3} : b_{r+3} \ldots\ldots$ 'stb

és fentebbiek szerint az y értéke' formájának kell lenni:

$$y = \frac{M + Ny}{P + Qy} \text{ honnét: } Qy^2 + (P - N)y - M = 0$$

továbbá állani fog:

$$x = a_1 : b_1 + a_2 : b_2 \ldots\ldots\ldots + a_{r-1} : b_{r-1} + y$$

's innét ismét lévén az x értékének formája:

$$x = \frac{M' + N'y}{P' + Q'y} \text{ találtatik } y = \frac{M' - P'x}{Qx - N'}$$

's az y-nak ezen értékét a' fentebbi egyenletben helyettezvén:

$Q\left(\frac{M'-P'x}{Qx-N'}\right)^2+(P-N)\frac{M'-P'x}{Qx-N'}-M=0$ a' törekek' feloldása után, hasonlag az (x)-nek második hatványára emelkedő egyenletet ad.

Példák:

a.) Legyen a' feladott törek 3 tagos fordulatú és

$x=1:2+1:3+1:4+1:2+1:3+1:4$...... végetlenig, leszen:

$x=1:2+1:3-1:4+x$ mellyből:

$$\beta_3=b_3+x\ldots\ldots\ldots=4+x$$

$$\beta_2=\beta_3 b_2+a_3\ldots\ldots\ldots=13+3x$$

$$\beta_1=\beta_2 b_1+a_2 b_3\ldots\ldots=30+7x$$ tehát a' törek' értéke

$\frac{M}{N}=\frac{a_1\beta_2}{\beta_1}=\frac{13+3x}{30+7x};=x$ az az: $\frac{M+Nx}{P+Qx}$ formáju, a' belőle kikövetkeztetett egyenlet pedig:

$7x^2+27x-3=0$ vagy: $x^2+3{,}85714x-1{,}85714=0$ második emeletü, mellynek gyökere $x=0{,}43289$'s a' három első tag

értéke $=\frac{13}{30}=0{,}43333\ldots>0{,}43289$

a' négy elsőé $\frac{29}{67}=0{,}43235<0{,}43289$

b.) Az elébbeni 3 tagos fordulatu töreket megtartván, ha azt másik 3 tagu nem fordulatos törek $1:5+1:3+1:1$ előzi meg, legyen:

$x=1:5+1:3+1:1+1:2+1:3+1:4+1:2+1:3+1:4$.....végetlenig

's tétessék: $y=1:2+1:3+1:4+1:2+1:3+1:4$......... végetlenig

leszen az (y)nak formája $y=\frac{M+Ny}{P+Qy}=\frac{13+3y}{30+7y}$ mellyből:

$Qy^2+(P-N)y-M=0$; számokban: $7y^2+27y-13=0$

továbbá a' fordulatos törek helyett (y)-ont helyettezvén

$x=1:5+1:3+1:1+y$ honnét:

$$\beta_3=b_3+y\ldots.=1+y$$

$$\beta_2=\beta_3 b_2+a_3=4+3y$$

$$\beta_1=\beta_2 b_1+a_2\beta_3=21+16y$$

$\frac{a_1\beta_2}{\beta_1}=\frac{4+3y}{21+16y}=x$'s ebből: $y=\frac{4-21x}{16x-3}$

's ezen értéknek helyretételével a' fentebbi egyenlet:

$$7\frac{(4-21x)^2}{(16x-3)^2}+\frac{27(4-21x)}{(16x-3)}-13=0 \text{ öszvevonva:}$$

$$9313x^2-3501x+329=0 \text{ vagy: } x^2-0,375926x+0,35327=0$$

mellynek gyökere $x=0,189648$ és a' 3 első tag'

$$\text{értéke } \frac{4}{21}=0,190476 > 0,1896948$$

$$\text{a' 4 elsőe } \frac{11}{58}=0.18922 < 0.1896948$$

$$\text{az 5 elsőe } \frac{36}{196}=0,189744 > 0,1896948 \text{ stb.}$$

2.) Ha tehát megforditva valamelly 2-dik emeletü egyenlet $x^2+px=q$ adatván, annak gyökerét $x=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q})-\frac{1}{2}p$ folytonos törek által kellene elő-terjeszteni; leszen a' fentebbi lehozatokhoz hasonlítva:

$q=a_1$; $\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}b_1$ az az: $p=b_1$ és az x-nek megfelelő folytonos törek

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q})-\frac{1}{2}p=x=q:p+q:p+q:p+q:p\ldots\ldots \text{ végetlenig}$$

Például: A' legközelebbi egyenlet volt: $x^2-0,375926x=-0,035327$

mellyben: $q=-0.035327$; $p=0,377926$ honnét:

$$x=-0,035327:-0,375926-0,035327:-0,375926-0,035327:-0,375926$$

mellyben az előjegyek nem folyvást állitók.

találtatott pedig $x=0,1896948$

's az első tag értéke $0,093973 < 0,1896948$

a' két elsőé $0,125294 < 1896948\ldots$ 'stb.

Továbbá, mivel: $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q})=\frac{1}{2}p+q:p+q:p+q:p$ 'stb ezen forma szerint a' nem tökéletes négyszögek' gyökerét könnyü leszen folytonos törek által kifejezni. Ugyan is, az adott nem tökéletes négyszög szám két részre szakasztatván, mellyeknek egyike tökéletes négyszög; 's legyen az $=m^2$ másika $=\pm n$; leszen a' kifejtett formához hasonlitva: $\frac{1}{4}p^2=m^2$; és igy $\frac{1}{2}p=m$; $p=2m$; ezenkivül $q=\pm n$; melly értékek' helyettezésével:

$$\sqrt{m^2\pm n})=m\pm n:2m\pm n:2m\pm n:2m\ldots\ldots \text{ 'stb végetlenig}$$

Például: $\sqrt{57}=\sqrt{7^2+8})$ tehát $m=7$; $n=8$ honnét:

$$\sqrt{56}=7+8:14+8:14+8:14+8:14\ldots\ldots \text{ 'stb.}$$

$$=7+4:7+2:7+2:7+2:7\ldots\ldots \text{ 'stb (146 lap.)}$$

Azonképen, mivel: $\sqrt{57} = \sqrt{8^2 - 7})$ mellyben: $m = 8$; $n = -7$.

$\sqrt{57} = 8 - 7 : 16 - 7 : 16 - 7 : 16 - 7 : 16 \ldots\ldots$ 'stb.

találtatik pedig: $\sqrt{57} = 7{,}5498344$

Mellyhez az első törek öszveszámlált tagait hasonlítván:

$$7 + \frac{4}{7} = 7{,}5714285 > 7{,}5498344 \qquad 7 + \frac{28}{51} = 7{,}5490196 < 7{,}5498344$$

$$7 + \frac{204}{371} = 7{,}5498652 > 7{,}5498344$$

ellenben a' második törek öszve hasonlításából, mellyben az előjegyek nem folyvást állitók:

$$8 - \frac{7}{16} = 7{,}5625 > 7{,}5498344 \qquad 8 - \frac{112}{249} = 7{,}5502008 > 7{,}5498344$$

$$8 - \frac{1743}{3872} = 7{,}5498451 > 7{,}5498344.$$

Tört függvények. Vissza futó sorzatok

(*Series recurrentes.*)

Eddigiekben a' függvényeknek két fő nemei tüntek elő; úgymint:

I.) Véges egész függvények, mellyeknek értéke bizonyos (n) számú tagok által telyesen meghatároztatik. 'S ezeknek átalános formája (n)-nek a' tagok' számát jelentő véges, egész szám értékével:

$$fx = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + \ldots\ldots Nx^{p+nq}$$

melly mint könnyen láthatni A; B; C;... 'stb. p; q; n; egymástol független akarmi mennyiséget (0-t is ide értvén) jelentő értékeivel, mind az emelkedő mind a' hanyatló hatványok szerint elrendelt véges egész függvények' lehető formáit átalánosan magában foglalja.

Egyszersmind világos az is, hogy ha két véges függvények mellyeknek kitételei:

$$fx = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots . Nx^{p+nq}$$
$$f'x = A'x^r + B'x^{r+u} + C'x^{r+2u} + D'x^{r+2u} + \ldots . N'x^{p+nq}$$

's mellyekben, a' változó hatványainak külzései egymással rávitelesek, vagy $q = mu$ értékével ollyanyokká tétethetnek; az illyeneket, némelly ösztevők 0-ba válni gondoltatván, könnyebb öszvehasonlítás kedviért: a' változó hatványainak ugyan azon közös külzésével előre menő kitételekben lehet előterjeszteni. Ugyanis a' mondott feltétellel volna, $q = mu$; $2q = 2mu$....'stb. tehát az $f'x$ hatványai' külzésével:

$$fx = Ax^p + 0.x^{p+u} + 0.x^{p+2u} + \ldots Bx^{p+mu} + 0.x^{p+(m+1)u} + \ldots Cx^{p+2mu} \ldots \text{'stb.}$$

mellyben $Bx^{p+q} = Bx^{p+mu}$; $Cx^{p+2q} = Cx^{p+2mu}$; ..... 'stb ellenben az: x^{p+u}; x^{p+2u} .... 'stb. $x^{p+(m+1)u}$; $x^{p+(m+2)u}$ .... 'stb. ösztevői $= 0$.

II.) Végetlen egész függvények az az: sorzatok, mellyeknek tellyes értékét akarhány tagoknak öszveszámításával is, kimerítőleg ugyan meg nem határozhatjuk: mind az által a' tagok' egymásbol származtának törvényéből, ha egyszersmind a' sorzat' öszvehajlása, fentebb (93—124 lap) előadottak, vagy egyéb jegyek után bebizonyult, minél több tagok' számbavételével, az igaz értékhez mind inkább és megkivántatóképen közelithetünk. Ezeknek átalános formája, tekintettel az ösztevők egymásbol származtára, (n)-nek végetlen egész szám értékével:

$$fx = A_0 x^p + A_1 x^{p+q} + A^2 x^{p+2q} + \ldots\ldots A_n x^{p+nq}$$

Következő visgálatinknak tárgya leszen, mindenek előtt megmutatni: hogy valamennyi ismert függvények ezen két átalános formák közül vagy egyik, vagy másik alá tartoznak; 's ehez képest az öszves analysis minden tanitmányait, 's különösebben a' függvények' tudományát a' (9-dik lapon) mondottak értelmében elkülönözve, azon nézet alá foglalván; mi szerint: akar a' véges akar a' végetlen függvények', 's azokba foglalt ismeretlenek' és változók' (4 lap) értékeit, egészen vagy közelitőleg kiszámíthassuk: a' már eddig előkerült két, több és végetlen szakuak' kikifejtései után, jelenleg a' tört függvények' kifejtésere fogunk által menni.

Legyen:

$$\frac{1}{1+x} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

kell lenni 0-hoz egyenlítve:

$$0 = \left.\begin{array}{r} A_0 + A_1 \\ -1 + A_0 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{r} A_2 \\ + A_1 \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{r} A_3 \\ + A_2 \end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{r} A_4 \\ + A_3 \end{array}\right\} x^4 + \ldots \text{'stb.}$$

mellyből (92. lap szerint)

$$A_0 = 1;\ A_1 = -1;\ A_2 = 1;\ A_0 = -1;\ A_4 = 1;\ A_5 = -1 \ldots \text{'stb.}$$

ellenben legyen:

$$\frac{x^2}{x^3+x^4} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

innét 0-hoz egyenlítve:

$$0 = -x^2 + A_0x^3 + \left.\begin{matrix}A_1\\ \ \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix}A_2\\A_1\end{matrix}\right\} x^5 + \left.\begin{matrix}A_3\\A_2\end{matrix}\right\} x^6 + \ldots\ \text{'stb.}$$

mellyből $-1 = 0$;

következőleg a' feltett egyenlítés képtelenségre vezetvén: ez utóbbi tört függvény az (x)-nek állító, egész hatványai mentében emelkedő sorzattá ki nem fejtethetik. mindazáltal valóságos osztás eszközöltetvén leszen:

$$\frac{x^2}{x^3 + x^4} = x^{-1} - 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \ldots\ \text{'stb.}$$

és ha a' feladott töreket hasonlatos formáju sorzathoz egyenlitjük; tévén:

$$\frac{x^2}{x^3 + x^4} = A_0x^{-1} + A_1x^3 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots\ \text{'stb. találtatik:}$$

$$0 = \left.\begin{matrix}A_0\\-1\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}A_1\\+A_3\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}A_2\\+A_1\end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix}A_3\\+A_2\end{matrix}\right\} x^5 + \left.\begin{matrix}A^4\\+A_3\end{matrix}\right\} x^6 + \ldots\ \text{'stb. honnét:}$$

$$A_0 = 1;\ A_1 = -1;\ A_2 = 1;\ A_3 = -1;\ A_4 = 1;\ \ldots\ \text{'stb.}$$

tehát: az ekként meghatározott ösztevőkkel, szintúgy mint valóságos osztással:

$$\frac{x^2}{x^3 + x^4} = x^{-1} - 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 \ldots\ \text{'stb.}$$

ezekből pedig, az egyenletbe teendő sorzat' formájának, látnivalóképen az adott tört függvény formájához képest kelletvén felvétetnie:

a.) El kell itélni tudnunk, hogy a' kifejtendő tört függvénynek millyen formáju sorzat fog megfelelni.

Továbbá minthogy:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots\ \text{'stb.} =$$

$$\frac{1}{x+1} = x^{-1} - x^{-2} + x^{-3} - x^{-4} + x^{-5} - \ldots\ \text{'stb.}$$

nem különben:

$$\frac{x^2}{x^3 + x^4} = x^{-1} - 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots\ \text{'stb.} =$$

$$\frac{x^2}{x^4 + x^3} = x^{-2} - x^{-3} + x^{-4} - x^{-5} + x^{-6} - x^{-7} + \ldots\ \text{'stb.}$$

azért is: némelly törtt függvények a' változónak mind emelkedő, mind hanyatló hatványai mentében kifejthetők lévén:

b.) Kérdésbe kell vennünk, hogy a' feladott tört függvény mind kétféleképen kifejtethetik-e vagy nem.

Tehát ezeknek folytában:

Legyen mind a' számítóban mind a' nevezőben, a' változónak emelkedő egész hatványai szerint elrendelt, tört függvény' átalános kitétele:

$$fx = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}} \text{ mellyben,}$$

minthogy a' közvetlen osztás nehány elsőbb tagokig eszközöltetvén, hasonló formáju sorzat jő szinre:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots. \text{'stb.}}{a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \ldots. \text{'stb.}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots. \text{'stb.}$$

honnét 0-hoz egyenlítve következik:

$$\begin{array}{llllll}
0 = a_0A_0 & + a_0A_1 & x + a_0A_2 & x^2 + a_0A_3 & x^3 + a_0A_4 & x^4 + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.} \\
\alpha_0 & + a_1A_3 & + a_1A_1 & + a_1A_2 & + a_1A_3 & + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.} \\
 & - \alpha_1 & + a_2A_3 & + a_2A_1 & + a_2A_2 & + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.} \\
 & & - \alpha_2 & + a_3A_0 & + a_3A_1 & + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.} \\
 & & & - \alpha_3 & + a_4A_0 & + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.} \\
 & & & & - \alpha_4 & + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.}
\end{array}$$

tehát az ösztevők egymás után:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{a_0};\ A_1 = \frac{\alpha_1 - a_1A_0}{a_0};\ A_2 = \frac{\alpha_2 - a_1A_1 - a_2A_0}{a_0};\ A_3 = \frac{\alpha_3 - a_1A_2 - a_2A_1 - a_3A_0}{a_0}$$

. . . .

$$A_n = \frac{\alpha_n - a_1A_{n-1} - a_2A_{n-2} - a_3A_{n-3} \ldots. - a_rA_{n-r} \ldots\ldots}{a_0}$$

azért is: mivel ezen egyenletek az (n)-nek akarmeddig folytatott értékével semmi képtelenségre nem vezetnek, a' szemlélet aláfogott tört függvényt, felvett formáju, az az: (x)-nek emelkedő hatványai szerint előre menő sorzatra ki lehet fejteni. Minél fogva tétessék ezentúl:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.. \text{'stb.}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.. \text{'stb.}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.. \text{'stb.}$$

és mivel (x) változó lévén akarmi értéket felvehet, kell lenni x^u helyretételével hasonlatosképen:

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 x^u+\alpha_2 x^{2u}+\alpha_3 x^{3u}+\ldots\ \text{'stb.}}{a_0+a_1 x^u+a_2 x^{2u}+a_3 x^{3u}+\ldots\ \text{'stb.}}=A_0+A_1 x^u+A_2 x^{2u}+A_3 x^{3u}+\ldots\ \text{'stb.}$$

's mind két felöl $\frac{x^p}{x^q}$-val szorozva:

$$\frac{\alpha_0 x^p+\alpha_1 x^{p+u}+\alpha_2 x^{p+2u}+\ldots\ \text{'stb.}}{a_0 x^q+a_1 x^{q+u}+a^2 x^{q+2u}+\ldots\ \text{'stb.}}=A_0 x^{p-q}+A_1 x^{p-q+u}+A_2 x^{p-q+2u}+\ldots\ \text{'stb.}$$

következőleg: ezen utóbbi, és igy a' (166 lapon) mondottak értelmében, átalánosan minden:

$$\frac{\alpha_0 x^p+\alpha_1 x^{p+q}+\alpha_2 x^{p+2q}+\alpha_3 x^{p+3q}+\ldots\ \text{'stb.}}{a_0 x^r+a_1 x^{r+u}+a_2 x^{r+2u}+a_3 x^{r+3u}+\ldots\ \text{'stb.}}$$ törekek; az (x)-nek emelkedő hatványai szerint elrendelt sorzatokra kifejthetők.

Továbbá, a' véges tört függvény:

$$fx=\frac{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots\ldots\alpha_p x^p}{a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots\ldots a_q x^q}$$; megfordított rendel iratván:

$$fx=\frac{\alpha_p x^p+\alpha_{p-1}x^{p-1}+\ldots\ldots\alpha_1 x+\alpha_0}{a_q x^q+a_{q-1}x^{q-1}+\ldots\ldots a_1 x+a_0}$$; és ha a' sorzatot, ismét közvetlen osztással nyerendő hanyadosok' hatványai mentében formálva, tesszük:

$$\frac{\alpha_p x^p+\alpha_{p-1}x^{p-1}+\ldots\ldots\alpha_1 x+\alpha_0}{a_q x^q+a_{q-1}x^{q-1}+\ldots\ldots a_1 x+a_0}=A_0 x^{p-q}+A_1 x^{p-q-1}+A_2 x^{p-q-2}+\ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

kell lenni 0-hoz egyenlítve:

$$0=\left.\begin{matrix}a_q A_0\\-\alpha_p\end{matrix}\right\} x^p+\left.\begin{matrix}a_q A_1\\+a_{q-1}A_0\\-\alpha_{p-1}\end{matrix}\right\} x^{p-1}+\left.\begin{matrix}a_q A_2\\+a_{q-1}A_1\\+a_{q-2}A_0\\-\alpha_{p-2}\end{matrix}\right\} x^{p-2}+\left.\begin{matrix}a_q A_3\\+a_{q-1}A_2\\+a_{q-2}A_1\\+a_{q-3}A_0\\-\alpha_{p-3}\end{matrix}\right\} x^{p-3}\ \ldots\ldots$$

tehát az ösztevők egymás után:

$$A_0=\frac{\alpha_p}{a_q};\quad A_1=\frac{\alpha_{p-1}-a_{q-1}A_0}{a_q};\quad A_2=\frac{\alpha_{p-2}-a_{q-1}A_1-a_{q-2}A_0}{a_q}$$

$$A_3=\frac{\alpha_{p-3}-a_{q-1}A_2-a_{q-2}A_1-a_{q-3}A_0}{a_q}$$

. . . .

$$A_n = \frac{\alpha_{p-n} - a_{q-1}A_{n-1} - a_{q-2}A_{n-2} - a_{q-3}A_{n-3} \ldots\ldots - a_1A_{n-(q-1)} - a_o A_{n-q}}{a_q}$$

annakokáért: mivel ezen egyenletek is, (n)nek akarmeddig folytatott értékével semmi képtelenségre nem vezetnek, a' szemlélet alá fogott véges tört függvényt, felvett formájú az az: (x)-nek hanyatló hatványai szerint elrendelt sorzatra ki lehet fejteni.

Mellyeknél fogva legyen ezentúl:

$$fx = \frac{\alpha_p x^p + \alpha_{p-1}x^{p-1} + \alpha_{p-2}x^{p-2} + \ldots.\ \alpha_1 x + \alpha_o}{a_q x^q + a_{q-1}x^{q-1} + a_{q-2}x^{q-2} + \ldots.\ a_1 x + a_o} = A_o x^{p-q} + A_1 x^{p-q-1} + A_2 x^{p-q-2} +$$

tétetvén pedig (x) helyett (x^u) és $\frac{x^r}{x^m}$-el szoroztatván leszen:

$$\frac{\alpha_p x^{r+pu} + \alpha_{p+1}x^{r+pu} + \ldots.\ \alpha_1 x^{r+u} + \alpha_o x^r}{a^q x^{m+qu} + a_{q-1}x^{m+qu-u} + \ldots.\ a_1 x^{m+u} + a_o x^m} = A_o x^{r-m+(p-q)u} + A_1 x^{r-m+(p-q)u} + \ldots \text{'stb.}$$

Következőleg: a' véges törtt függvényeket mind emelkedő mind hanyatló hatványok mentiben elrendelt sorzatokra ki lehet fejteni; a' végetleneket pedig csupán emelkedő hatványok szerint. Még pedig a' véges függvényekre nézve emelkedő hatványok mentében:

I.

(a.) $fx = A_o x^{p-q} + A_1 x^{p-q+u} + A_2 x^{p-q+2u} + A_3 x^{p-q+3u} + \ldots\ldots$ 'stb.

hanyatló hatványok mentében:

(b.) $fx = A_o x^{r-m+(p-q)u} + A_1 x^{r-m+(p-q-1)u} + A_2 x^{r-m+(p-q-2)u} + \ldots\ldots$ 'stb.

a' végtelenekre nézve pedig csupán emelkedő hatványok' mentében:

II.) $fx = A_o x^{p-q} + A_1 x^{p-q+u} + A^2 x^{p-q+2u} + A_3 x^{p-q+3u} + \ldots..$ 'stb.

Sőt ha a' fentebbi felvételek nem látszanának is, elegendő szigorúsággal bírni: elébbi lehozatainkat, magábol a' közvetlen osztással nyerendő hanyadosok' egymásbol származtának törvényéből következőképen bizonyitjuk.

Legyen a' törtt függvények' legátalánosabb kitétele: (166 lap.)

$$fx = \frac{\alpha_o x^p + \alpha_1 x^{p+q} + \alpha_2 x^{p+2q} + \alpha_3 x^{r+9q} + \ldots\ldots. \text{ 'stb.}}{a_o x^r + a_1 x^{r+u} + a_2 x^{r+2u} + a_3 x^{r+3u} + \ldots\ldots. \text{ 'stb.}}$$

vagy is: hogy egyenlő közös külzésre vonattathassék, tétetvén $q = mu$; és a' számítóban elő nem forduló hatványok ösztevői 0-ba válni gondoltatván: (166 lap.)

$$fx = \frac{\alpha_o x^p + \alpha_1 x^{p+u} + \alpha_2 x^{p+2u} + \alpha_m x^{p+mu} + \alpha_{m+1} x^{p+(m+1)u} + \ldots.\ \alpha_{2m} x^{p+2m} + \ldots \text{ 'stb.}}{a_o x^r + a_1 x^{r+u} + a_2 x^{r+2u} + a_3 x^{r+3u} + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 'stb.}}$$

ebben valóságos osztással találtatik az:

első hanyados $= \frac{\alpha_0}{a_0} x^{p-r}$; mellyet tegyünk $= A_0 x^{p-r}$; fent marad:

$(\alpha_1 - a_1 A_0) x^{p+u} + (\alpha_2 - a_2 A_0) x^{p+2u} + (\alpha_3 - a_3 A_0) x^{p+3u} + (\alpha_4 - a_4 A_0) x^{p+4u} +$ 'stb. legyen
$= \alpha_1' x^{p+u} + \alpha_2' x^{p+2u} + \alpha_3' x^{d+3u} + \alpha_4' x^{p+4u} + \ldots\ldots$ 'stb.

leszen ismét az osztás' megujitásával, a'

második hanyados $= \frac{\alpha_1'}{a_0} x^{p-r+u}$; mellyet tegyünk $= A_1 x^{p-r+u}$; fent marad:

$(\alpha_2' - a_1 A_1) x^{p+2u} + (\alpha_3' - a_2 A_1) x^{p+3u} + (\alpha_4' - a_3 A_1) x^{p+4u} + \ldots\ldots$ 'stb. legyen
$= \alpha_1'' x^{p+2u} + \alpha_2'' x^{p+3u} + \alpha_3'' x^{p+4u} + \alpha_4'' x^{p+5u} + \ldots\ldots$ 'stb. lesz azonképen a':

harmadik hanyados $= \frac{\alpha_1''}{a_0} x^{p-r+2u} = A_2 x^{p-r+2u}$; és a' maradék:

$(\alpha_2'' - a_1 A_2) x^{p+3u} + (\alpha_3'' - a_2 A_2) x^{p+4u} + (\alpha_4'' - a_3 A_2) x^{p+5u} + \ldots\ldots$ 'stb.
$= \alpha''' x^{p+3u} + \alpha_2''' x^{p+4u} + \alpha_3''' x^{p+5u} + \alpha_4''' x^{p+6u} + \ldots\ldots$ 'stb.

következőleg akarmeddig hasonlatosképen folytatva átalában az:

(n)-dik maradék

$(\alpha_2^{(n-1)'} - a_1 A_{n-1}) x^{p+(n)u} + (\alpha_3^{(n-1)'} - a_2 A_{n-1}) x^{p+(n-1)u} + (\alpha_4^{(n-1)'} - a_3 A_{n-1}) x^{p+(n+2)u} +$ 'stb.
$= \alpha_1^{n'} x^{p+(n)u} + \alpha_2^{n'} x^{p+(n+1)u} + \alpha_3^{n'} x^{p+(n+2)u} + \alpha_4^{n'} x^{p+(n+3)u} + \ldots\ldots$ 'stb.

tehát a' hanyadosok egymásbol származtának állandó törvénye szerint az:

$$(n+1)\text{-dik hanyados} : \frac{\alpha_1^{n'}}{a_0} x^{p-r+(n)u} = A_n x^{p-r+nu};$$

$$(n+2)\text{-dik} \;.\;\;.\;\;.\;\; \frac{\alpha^{(n+1)'}}{a_0} x^{p-r+(n+1)u} = A_{n+1} x^{p-r+(n+1)u}$$

. . . .

mellyekből nyilván kitünik, hogy: közvetlen osztással mindig az (x)nek, számláló haladásban (u) külzéssel előre menő hatványaira kell akadnunk; a' pedig hogy az egymásutáni ösztevők valahol elkezdvén azontul folyvást 0-ba váljanak, 's a' sorzat megszakadjon; vagy ellenkező esetben vég nélkül folytattassék: különösebb körülményektől, függ, mint alább látni fogjuk.

Továbbá világos az is, hogy a' felvett eljegyzések szerint:

$\alpha_1^{n'} = (\alpha_2^{(n-1)'} - a_1 A_{n-1})$; $\alpha_2^{(n-1)'} = \alpha_3^{(n-2)'} - a_2 A_{n-2}$; $\alpha_3^{(n-2)'} = \alpha_4^{(n-3)'} - a_3 A_{n-3} \ldots$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad \alpha_{r+1}^{(n-r)'} = \alpha_{r+2}^{(n-(r+1))'} - a_{r+1} A_{n-(r+1)} \quad .\quad .\quad .\quad .$$

$\alpha_r^{n-(n-1)'} = \alpha_r' = \alpha_r^{(n-n)'} - a_r A_0$; $\alpha_r^{(n-n)'} = \alpha_r$

Ezeket előre bocsátván, legyen most a' számító utolsó taga α_s; mellyen túl, $\alpha_{s+1} = \alpha_{s+2} = \alpha_{s+3} \ldots\ldots$ 'stb $= 0$; és azonképen a' nevezőé a_t; mellyen túl, $a_{t+1} = a_{t+2} = a_{t+3} \ldots$ 'stb. $= 0$; és tegyük:

Elsőben $s = t$. Minthogy (n) akarmi állító egész szám értékét felvehet, lehet egyszersmind $n = s = t$; a' midőn

$$\alpha^{s\prime} = \alpha_2^{(s-1)\prime} - a_1 A_{s-1};\ \alpha_2^{(s-1)\prime} = \alpha_3^{(s-2)\prime} - a_2 A_{s-2} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \alpha_s^{(s-(s-1))\prime} = \alpha_s' = \alpha_{s+1} - a_s A_0 = - a_s A_0$$

melly értékeknek helyretételével az s dik maradék' első taga:

$$\alpha_1^{s\prime} = - a_1 A_{s-1} - a_2 A_{s-2} - a_3 A_{s-3} \ldots\ldots - a_s A_0$$

következőleg az $(s+1)$-dik hanyados:

$$\frac{\alpha_1^{s\prime}}{a_0} = A_{s+1} = \frac{- a_1 A_{s-1} - a_2 A_{s-2} - a_3 A_{s-3} \ldots\ldots - a_s A_0}{a_0}$$

Ezentúl pedig akarmellyik határozatlan maradékban

$$\alpha_1^{(s+v)\prime} = \alpha_2^{(s+v-1)\prime} - a_1 A_{s+v-1}$$

$$\alpha^{(s+v-1)\prime} = \alpha_3^{(s+v-2)\prime} - a_2 A_{s+v-2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\alpha_s^{(v+1)\prime} = \alpha_{s+1}^{v\prime} - a_s A_v$$

és mivel ezen utóbbi kitételnél, szint úgy mint a' fentebbiekben:

$$\alpha_{s+1}^{v\prime} = \alpha_{s+2}^{(v-1)\prime} - a_{s+1} A_{v-1}$$

$$\alpha_{s+2}^{(v-1)\prime} = \alpha_{s+3}^{(v-2)\prime} - a_{s+2} A_{v-2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\alpha'_{s+v} = \alpha_{s+v+1} - a_{s+v} A_0$$

annál fogva egymás utáni helyettezéssel végezetre kell lenni, $\alpha_{s+1}^{v\prime} = 0$; következik hogy: A' sorzatnak A_{s+1}-dik tagánál az ösztevők egymásbol származtára nézve, bizonyos változatlan törvény áll bé; mi szerint minden utóbbiak az előtteniekből a' kint erednek, hogy a' közvetlenül elébbi $- a_s$-el; az azt megelőző $- a_{s-1}$-el $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - a_2 \ - a_1$-el szoroztatván, az egyes tevetek öszveadatnak, 's végre az egész a_0-val osztatik.

Másodszor: Legyen a.) A' nevező tagainak száma több a' számító' tagainak számánál $s > t$; vagy b.) A' számítóé több a' nevező tagainak számánál $t > s$.

Ez esetekben, ismét a' fentebbi lehozatok hasonló alkalmazásával könnyü által látni, hogy: a.) alatt a' mondott törvény az A_{t+1}-dik; b.) alatt pedig ugyan azon törvény az A_{s+1}-dik ösztevőnél áll bé.

Harmadszor. Ha vagy a' számító' vagy a' nevező tagai külön külön, vagy mind ketten egyszersmind, végetlen számuak.

Ezen körülményekkel nyilván való, hogy az $\alpha_1^{(s+v)}$ maradék (s)-nek (v)-nek bármilly véges értékével 0-ba nem válhat; minekokáért az ösztevők' egymásbol származtának törvénye is, sehol változatlanul elő nem áll.

Mind ezen szemléleteket pedig könnyü lévén azon esetre midőn (165 lap) $u = mq$; valamint a' lemenő sorzatokra is (*series descendentes*) csupán (u)-nak tagadon vételével kiterjeszteni; a' törtt függvényeket sorzatokká változtathatjuk:

I.) Megkivántató formáju (170 lap) sorzathoz egyenlítvén, 's az ösztevőket (169 lap) szokott módokon keresvén. Példák:

1.) Legyen a' kifejtendő függvény $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$; melly az átalános formával (170 lap.) a.) öszvehasonlíttatván találtatik: $p = q = 0$; $u = 1$; tehát az alapul felveendő egyenlet:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

az az: a' töreket feloldván és 0-hoz egyenlitve:

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) - (\alpha_0 + \alpha_1 x) = 0$$

mellyböl: a' szorozás valósággal végre hajtatván, és az egyenlő hatványok' ösztevői egybeszedetvén:

$$0 = \left.\begin{matrix} a_0 A_0 + a_0 A_1 \\ -\alpha_0 + a_1 A_0 \\ -\alpha_1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} a_0 A_2 \\ + a_1 A_1 \\ + a_2 A_0 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} a_0 A_3 \\ + a_1 A_2 \\ + a_2 A_1 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} a_0 A_4 \\ + a_1 A_3 \\ + a_2 A_2 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots \text{'stb.}$$

honnét a' külön ösztevőket (92. lap. 3. sz. szerint) 0-hoz egyenlítvén

$$a_0 A_0 - \alpha_0 = 0;\quad a_0 A_1 + \alpha_0 A_0 - \alpha_1 = 0;\quad a_0 A_2 + a_1 A_1 + a_2 A_0 = 0; \ldots\ldots \text{'stb.}$$

és végezetre ezen egyenletekböl az ösztevők' értékei:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{a_0}$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{a_0} - \frac{\alpha_0 a_1}{a_0^2} = \frac{a_0 \alpha_1 - \alpha_0 a_1}{a_0^2}$$

$$A_2 = \frac{-\alpha_0 a_2 + a_1 \alpha_1}{a_0^2} + \frac{\alpha_0 a_1^2}{a_0^3} = \frac{-(a_0 \alpha_0 a_2 + a_0 \alpha_1 a_1) + \alpha_0 a_1^2}{a_0^3}$$

. . . .

tehát emelkedő sorzatra kifejtve:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = \frac{\alpha_0}{a_0} + \frac{a_0 \alpha_1 - \alpha_0 a_1}{a_0^2} x + \frac{\alpha_0 a_1^2 - a_0(\alpha_0 a_2 + \alpha_1 a_1)}{a_0^3} x^2 + \ldots \text{'stb.}$$

hanyatló sorzatra pedig öszvehasonlittatván (170 lap) a' b.) alatti formával $p = 1$; $q = 2$; $r = m = 0$; $u = 1$; tehát az alapul veendő egyenlet:

$$\frac{\alpha_1 x + \alpha_0}{a_2 x^2 + a_1 x + a_0} = A_0 x^{-1} + A_1 x^{-2} + A_2 x^{-3} + A_3 x^{-1} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

honnét a' fentebbiekhez mindenben hasonló munkálattal:

$$0 = \left.\begin{array}{r} a_2A_0 \\ -\alpha_1 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{r} a_2A_1 \\ +a_1A_0 \\ -\alpha_0 \end{array}\right\} x^0 + \left.\begin{array}{r} a_2A_2 \\ +a_1A_1 \\ +a_0A_0 \end{array}\right\} x^{-1} + \left.\begin{array}{r} a_2A_3 \\ +a_1A_2 \\ +a_0A_1 \end{array}\right\} x^{-2} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

tehát a' külön ösztevőket 0-hoz egyenlítvén:

$$a_2A_0 - \alpha_1 = 0;\quad a_2A_1 + a_1A_0 - \alpha_0 = 0;\quad a_2A_2 + a_1A_1 + a_0A_0 = 0;\ \ldots \text{'stb.}$$

mellyekből a' keresett ösztevők' értékei:

$$A_0 = \frac{\alpha_1}{a_2}$$

$$A_1 = \frac{\alpha_0}{a_2}\,\frac{-\alpha_1 a_1}{a_2^2} = \frac{\alpha_0 a_2 - \alpha_1 a_1}{a_2^2}$$

$$A_2 = \frac{-(\alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_0)}{a_2^2} + \frac{\alpha_1 a_1^2}{a_2^3} = \frac{-(\alpha_1 a_0 a_2 + \alpha_0 a_1 a_2 - \alpha_1 a_1^2)}{a_2^3}$$

annakokáért hanyatló sorzatra kifejtve:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = \frac{\alpha_1}{a_2} x^{-1} + \frac{\alpha_0 a_2 - \alpha_1 a_1}{a_2^2} x^{-2} \frac{-(\alpha_1 a_0 a_2 + \alpha_0 a_1 a_2 - \alpha_1 a_1^2)}{a_2^3} x^{-3} \ldots \text{'stb.}$$

Tétessék ugyan ezen példában $a_2 = 0$; leszen a' közelebbi kifejtésben hasonlag $a_2 = 0$-nak tétetvén, emelkedő sorzatra:

$$2.)\ \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x} = \frac{\alpha_0}{a_0} - \frac{(a_0\alpha_1 - \alpha_0 a_1)}{a_0^2} x \frac{-(a_0\alpha_1 - \alpha_0 a_1)}{a_0^3} a_1 x^2 + \frac{(a_0\alpha_1 - \alpha_0 a_1)}{a_0^4} a_1^2 x^3 \ldots \text{'stb.}$$

mellynek, mivel véges függvény hanyatló sorzatra is kifejthetőnek kell lenni. A' hanyatló sorzatra adott legközelebbi kifejtésben azonban $a_2 = 0$ helyretételével semmi meghatározható ösztevők elö nem kerülhetvén tegyük az átalános formával öszvehasonlítva:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x} = A_0 + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + A_3 x^{-3} + \ldots\ldots \text{'stb.} \quad \text{mellyből:}$$

$$0 = \left.\begin{array}{r} a_1A_0 \\ -\alpha_1 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{r} a_1A_1 \\ +a_0A_0 \\ -\alpha_0 \end{array}\right\} x^0 + \left.\begin{array}{r} a_1A_2 \\ +a_0A_1 \end{array}\right\} x^{-1} + \left.\begin{array}{r} a_1A_3 \\ +a_0A_2 \end{array}\right\} x^{-2} + \ldots \text{'stb.}$$

és igy: $a_1A_0 - \alpha_1 = 0$; $a_1A_1 + a_0A_0 - \alpha_0 = 0$; $a_1A_2 + a_0A_1 = 0$; ....'stb. melly egyenletekből az ösztevők' értékei $A_0 = \frac{\alpha_1}{a_1}$; $A_1 = \frac{\alpha_0 a_1 - a_0\alpha_1}{a_1^2}$

$A_2 = \frac{-(\alpha_o a_1 - a_o \alpha_1)}{a_1^3}$ .....'stb. következőleg hanyatló sorzatra:

$$\frac{\alpha_o + \alpha_1 x}{a_o + a_1 x} = \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_o a_1 - a_o \alpha_1}{a_1^2} x^{-1} - \frac{(\alpha_o a_1 - a_o \alpha_1)}{a_1^3} a_1 x^{-2} + \frac{(\alpha_o a_1 - a_o \alpha_1)}{a_1^4} a_1^2 x^{-3} \ldots \text{'stb.}$$

nem különben ugyan ezen példában továbbá tétetvén $a_o = \alpha_o = 1$; találtatik emelkedő sorzatra:

$$3.)\ \frac{1 + \alpha_1 x}{1 + a_1 x} = 1 + (\alpha_1 - a_1)x - (\alpha_1 - a_1)\, a_1 x^2 + (\alpha_1 - a_1)\, a_1^2 x^3 - \ldots \text{'stb.}$$

hanyatló sorzatra:

$$\frac{1 + \alpha_1 x}{1 + a_1 x} = \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{a_1 - \alpha_1}{a_1^2} x^{-1} - \frac{(a_1 - \alpha_1)}{a_1^3} x^{-2} + \frac{(a_1 - \alpha_1)}{a_1^4} x^{-3} - \ldots \text{'stb.}$$

vagy ha $\alpha_1 = a_1 = 1$ emelkedő sorzatra:

$$4.)\ \frac{\alpha_o + x}{a_o + x} = \frac{\alpha_o}{a_o} + \frac{(a_o - \alpha_o)}{a_o^2} x - \frac{(a_o - \alpha_o)}{a_o^3} x^2 + \frac{(a_o - \alpha_o)}{a_o^4} x^3 - \ldots \text{'stb.}$$

hanyatlóra:

$$\frac{\alpha_o + x}{a_o + x} = 1 + (\alpha_o - a_o)x^{-1} - (\alpha_o - a_o)a_o x^{-2} + (\alpha_o - a_o)a_o^2 x^{-3} - \ldots \text{'stb.}$$

Honnét ha tesszük $\alpha_o = a_o = a_1 = 1$ és $\alpha_1 = -1$ emelkedő sorzatra

$$5.)\ \frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + 2x^6 - \ldots \text{'stb.}$$

hanyatlóra:

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 + 2x^{-1} - 2x^{-2} + 2x^{-3} - 2x^{-4} + \ldots \text{'stb.}$$

És ha $\alpha_o = 1$; $\alpha_1 = 0$; emelkedő sorzatra:

$$6.)\ \frac{1}{a_o + a_1 x} = \frac{1}{a_o} = \frac{1}{a_o} - \frac{a_1}{a_o^2} x + \frac{a_1^2}{a_o^3} x^2 - \frac{a_1^3}{a_o^4} x^3 + \ldots \text{'stb.}$$

hanyatlóra:

$$\frac{1}{a_o + a_1 x} = \frac{1}{a_1} x^{-1} - \frac{a_o}{a_1^2} x^{-2} + \frac{a_o^2}{a_1^3} x^{-3} - \frac{a_o^3}{a_1^4} x^{-4} + \ldots \text{'stb.}$$

Az efféle sorzatok figyelmet érdemelnek kivált azon tekintetből, hogy bennök $x = 1$-nek tétetvén némi analytikai képtelenségekre látszanak vezetni. Igy a' 2.) alatt ha volna $\alpha_o = a_o = 1$; $\alpha_1 = 15$; $a_1 = 1$ és x mint mondatott $= 1$; találtatnék a' kifejtés szerint emelkedő sorzat:

$$\frac{\alpha_0+\alpha_4 x}{a_0+a_1 x}=\frac{\alpha_0}{a_0}+\frac{a_0\alpha_1-\alpha_0 a_1}{a_0^2}-\frac{a_0\alpha_1-\alpha_0 a_1}{a_0^3}+\frac{a_0\alpha_1-\alpha_0 a_1}{a_0^4}-\ldots \text{'stb. az az:}$$

$$\frac{1+15}{1+1}=8=1+14-14+14-14\ldots\ldots=1+0+0+0\ldots\text{ vagy}=15-0-0-0$$

hanyatló sorzat ugyan azon számokkal:

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1}{a_0+a_1}=\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_0 a_1-a_0\alpha_1}{a_1^2}-\frac{(\alpha_0 a_1-a_0\alpha_1)}{a_1^3}+\frac{\alpha_0 a_1-a_0\alpha_1}{a_1^4}-\ldots \text{'stb.}$$

$$\frac{1+15}{1+1}=8=15-14+14-14+14\ldots=15-0-0-0\ldots\text{vagy:}=1+0+0+0 \text{ 'stb.}$$

Hasonlag a' 6.) alatt $a_0=a_1=x=1$ értékével mind emelkedő mind hanyatló sorzatra kifejtve:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1\ldots=0+0+0+0\ldots\text{ vagy:}=1-0-0-0-0$$

mellyekhez hasonló helyretételeket könnyü a' többiekben is eszközleni.

Mindazáltal azokbol, mellyek a' sorzatok' öszvehajlásáról és szétterüléséröl mingyárt eleintén (94 lap) mondattak, által láttuk hogy: akar hány tagok' egybe vett öszvetét $A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n$; S_n-el, az után következőkét $A_{n+1}+A_{n+2}+A_{n+3}\ldots$ 'stb.; P-vel, az egész végetlen sorzat' értékét végezetre Q-val jegyezvén; mind az öszve hajló mind a' szétterülő sorzatokra nézve átalánosan:

$$Q=S_n+P$$

és hogy, ha bár (n)-nek végetlen értékével is, $Q=S_n$; csak akkor tétethetik midőn ugyan akkor $P=0$; vagy is a' sorzat' öszve hajlása bizonyos.

Ellenben mivel a' felhozott sorzatok' öszvehajlására a' fentebbiekben elő adott ismertetmények folytában, $x<1$ lenni mulhatlanul megkivántatnék: azoknak öszveteikben $x=1$ értékével viszont a' nevezett pótlék el nem mellőztethetvén, annak számbavételével e l s ő e s e t b e n $P=\pm 7$ m á s o d i k b a n $P=\pm\frac{1}{2}$ igaz leszen:

$$\frac{1+15}{1+1}=8=1+14-14+14-14+\ldots\ldots\pm 7 \text{ és:}$$

$$\frac{1}{1+1}=\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots\pm\tfrac{1}{2}$$

valamint más részröl:

$$8=1+14-14+14-14+\ldots\ldots\ldots\text{ 'stb és:}$$

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots\ldots\text{ 'stb.}$$

ha bár végetlenül folytatva is nyilvánosan hamis következtetés volna.

Egyébiránt, minthogy a' szóban forgó sorzatok $x < 1$ értékével mindig öszve hajlók maradnak: annál fogva a' nevezett ingó sorzatok' értelme nem egyéb mint az, hogy bennök az öszvehajlás határa $= \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$ mellyet x-nek egységen alól folyvásti nevekedésével vég nélkül megközelíthetni ugyan, de egész a' mondott határig tellyes tökéletességben kivinni lehetetlen.

II. Ha a' sorzat formája illetőleg megválasztatott, az ösztevőket α_0; α_1; α_2.... 'stb. és a_0; a_1; a_2; ...... 'stb. értékeiből a' (170 lapon) adott kitételek szerint könnyü egymásbol származtatni. Például legyen:

$$1.)\ \frac{3}{3+2x} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

tehát a' feladott törekben $\alpha_0 = 3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots\ldots$ 'stb. $= 0$; $a_0 = 3$; $a_1 = 2$; $a_2 = a_3 = a_4 \ldots\ldots$ 'stb. $= 0$; találtatik azonnal:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{a_0} = 1;\ A_1 = \frac{-a_1A_0}{a_0} = \frac{-2}{3};\ A_2 = \frac{-a_1A_1}{a_0} = \frac{4}{9}\ A_3 = \frac{-a_1A_2}{a_0}$$

$$= \frac{-8}{27};\ A_4 = \frac{16}{81};\ \ldots\ \text{'stb. honnét:}$$

$$\frac{3}{3+2x} = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{16}{81}x^4 - \frac{32}{243}x^5 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$2.)\ \frac{1-x}{1-5x+6x^2} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

mellyben: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = -1$; $a_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \ldots$ 'stb. $= 0$; $a_0 = 1$; $a_1 = -5$; $a_2 = 6$; $a_3 = a_4 = a_5 \ldots\ldots$ 'stb. $= 0$ leszen:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{a_0} = 1;\ A_1 = \frac{\alpha_1 - a_1A_0}{a_0} = 4;\ A_2 = \frac{-a_1A_1 - a_2A_0}{a_0} = 14$$

$$A_3 = \frac{-a_1A_2 - a_2A_1}{a_0} = 46;\ A_4 = \frac{-a_1A_3 - a_2A_2}{a_0} = 146\ \ldots\ldots \text{'stb. és:}$$

$$\frac{1-x}{1-5x+6x^2} = 1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + 146x^4 + 454x^5 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

Mellyeknek folytában figyelmet érdemel:

a.) Hogy az előadott kifejtésekkel származott sorzatok, minthogy végtöl végig minden utóbbi tag a' közvetlenül elébbiek által adatik a' (87 lapon) mondottak értelmében szükségképen visszafutók.

b.) A' nevezőben előforduló a_1; a_2; a_3.... 'stb. mennyiségek, mellyekkel valamellyik következő ösztevőnek megtalálására, az előtteniek (r)-nek (n)-nek egész számok szerint változó értékeivel $-a_r A_{n-r}$ viszonyban szoroztatnak, **viszony léptékének**; (*scala relationis*) az egy tagu viszony léptékkel formált sorzatok pedig (mellyekben tehát $a_2 = a_3 = a_4$... 'stb. $= 0$) **első rangú**; a' két tagu viszony léptékkel formáltak (mellyekben $a_3 = a_4 = a_5$.... 'stb. $= 0$) **második**; 's így tovább a' **három, négy, öt**.... 'stb. viszony léptékkel bírók, **harmadik, negyedik**.... 'stb. rangúaknak neveztetnek. Nem tévén különbséget ha a' közben esők közül némellyek $= 0$.

c.) Az ollyan törekeket mellyekben a_0 nem 0; mind a' számítónak mind a' nevezőnek elosztásával könnyü lévén ollyan formára venni hogy legyen $a_0 = 1$; ezen változtatás következésében a' sorzatnak átalános ösztevője (170 lap) egyszerübben: $A_n = \alpha_n - a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} - a_3 A_{n-3} \ldots\ldots - a_r A_{n-r}$; nem különben az egymás után következő ösztevők' egyszerübb kitételei lesznek: $A_0 = \alpha_0$; $A_1 = \alpha_1 - a_1 A_0$; $A_2 = \alpha_2 - a_1 A_1 - a_2 A_0$; $A_3 = \alpha_3 - a_1 A_2 - a_2 A_1 - a_3 A_0 \ldots\ldots$ 'stb.

d.) Midőn $a_0 = 0$; vagy azonképen több egymást követő $a_1 = a_2 = a_3$... 'stb. $= 0$; az ösztevők' kitételei részint végetlenekké, részint határozatlanokká válnának. Illyenkor azonban az a_1 helyét a' legelső 0-ba nem váló mennyiség tölti bé, a' viszony léptéket pedig az utánna következők képezik; magában értetven hogy a' sorzat formáját valamint mindenkor úgy ezen esetben is a' fentebb előadott átalános szemléletek és bizonyitmányokhoz képest kell megválasztani.

Például: Legyen $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_2 x^2 + a_3 x^3}$ mellyben $a_0 = a_1 = 0$; emelkedő sorzatra kifejtendő, lenne a' megfelelő sorzathoz egyenlítve:

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_2 x^2 + a_3 x^3} = A_0 x^{-2} + A_1 x^{-1} + A_2 x^0 + A_3 x + A_4 x^2 + \ldots\text{'stb.}$$

honnét;

$$0 = \left.\begin{array}{r} a_2 A_0 + a_2 A_1 \\ -\alpha_0 + a_3 A_0 \\ -\alpha_1 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{r} a_2 A_2 \\ + a_3 A_1 \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{r} a_2 A_3 \\ + a_3 A_2 \end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{r} a_2 A_4 \\ + a_3 A_3 \end{array}\right\} x^4 + \ldots\text{'stb.}$$

tehát a' keresett ösztevők:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{a_2};\quad A_1 = \frac{\alpha_1 - a_3 A_0}{a_2};\quad A_2 = \frac{-a_3 A_1}{a_2};\quad A_3 = \frac{-a_3 A_2}{a_2} \ldots\ldots\text{'stb.}$$

ellenben: Ha a' számítóban előforduló α_o; α_1; α_2;.... 'stb. mennyiségek közül akar egymásután, akar külön némellyek $= 0$; azon körülmény sem egyik sem másik esetben egyéb változást maga után nem von mint azt, hogy illetőleg α_o; α_1; α_2.... 'stb. 0-nak tétessék. Például kívántassék:

$$\frac{\alpha_2 x^2}{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^5}$$ mellyben $\alpha_o = \alpha_1 = 0$; emelkedő sorzatra kifejtetni;

tehát az egyenlet:

$$\frac{\alpha_2 x^2}{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^5} = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots \text{'stb.}$$

a' sorzat' ösztevői pedig:

$$A_o = \frac{\alpha_o}{a_o} = 0;\ A_1 = \frac{\alpha_1 - a_1 A_o}{a_o} = 0;\ A_2 = \frac{\alpha_2 - a_1 A_1 - a_2 A_o}{a_o} = \frac{\alpha_2}{a_o};$$

$$A_3 = \frac{-a_1 A_2 - a_2 A_1 - a_3 A_o}{a_o} = \frac{-a_1 A_2}{a_o};\ A_4 = \frac{-a_1 A_3 - a_2 A_2 - a_3 A_1}{a_2} = \frac{-a_1 A_3 - a_2 A_2}{a_2}$$

éppen azok mint ha tétetett volna:

$$\frac{\alpha_2 x^2}{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} = A_o x^2 + A_1 x^3 + A_2 x^4 + A_5 x^5 + \ldots\ \text{'stb.}$$

III.) Ha a' kifejtendő tört függvényben, gyökér jeggyel illetett, vagy a' mi mind egy, tört hatványokra emelt változók fordulnak elő: akkor azokat, mind a' számítóban mind a' nevezőben (mint a' 166 lapon mondatott) a' változó' hatványainak ugyan azon közös külzésével előre menő törekké kell változtatni, és ugyan azon közös tört hatvány mentében elrendeltt sorzathoz egyenlíteni. Mint a' következő példából láthatni:

$$\frac{1+\sqrt{x}+2x}{1-3\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}-x\sqrt{x}} = \frac{1+x^{1/2}+2x}{1-3x^{1/3}+5x^{1/2}-x^{3/2}} = \frac{1+x^{3/6}+2x^{6/6}}{1-3x^{2/6}+5x^{3/6}-x^{9/6}};$$

és tétetvén:

$$\frac{1+x^{3/6}+2x^{6/6}}{1-3x^{2/6}+5x^{3/6}-x^{9/6}} = A_o + A_1 x^{1/6} + A_2 x^{2/6} + A_3 x^{3/6} + A_4 x^{4/6} + \ldots\ \text{'stb. lezen:}$$

$$\begin{array}{llllll}
0 = A_o & + A_1 x^{1/6} & + A_2 \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} x^{2/6} & + A_3 \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x^{3/6} & + A_4 \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} x^{4/6} & \ldots\ \text{'stb. honnét:} \\
\quad -1 & & \quad - A_o & \quad - 3A_1 & \quad - 3A_2 & \\
 & & & \quad + 5A_o & \quad + 5A_1 & \\
 & & & \quad - 1 & & \\
\end{array}$$

$A_0=1$; $A_1=0$; $A_2=3A_0=3$; $A_3=3A_1-5A_0+1=-4$; $A_4=3A_2-5A_1=9$;

tehát a' feladott törek sorzatra kifejtve:

$$\frac{1+\sqrt{x}+2x}{1-3\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}-x\sqrt{x}}=1+3x^{1/3}-4x^{1/2}+9x^{2/3}-27x^{5/6}+\ldots\text{ 'stb.}$$

Hogy ha pedig a' törtt függvénynek egész nevezője vagy egész számítója, akar külön akar egyszersmind, bizonyos hatványra van 'felemelve; azok mind az eddig előadottak szerint végetlen sorzathoz egyenlitve, mind a' kétszaki oktatmány (*theorema binomiale*) szerint felfejtetvén 's a' kétféle keletkezmény (*resultatum*) 0-ra vonatván belölök a' keresett ösztevők' értékei meghatároztathatnak.

Például legyen:

$$1.)\ \frac{\sqrt[3]{(1-3x)}}{1+2x+x^2}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+\ldots\text{ 'stb.}$$

mellyből találtatik:

$$\sqrt[3]{(1-3x)}=A_0+\left.\begin{matrix}A_1\\+2A_0\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}A_2\\+2A_1\\+A_0\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}A_3\\+2A_3\\+A_2\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}A_4\\+2A_3\\+A_2\end{matrix}\right\}x^4+\ldots\text{ 'stb.}$$

a' kétszaki oktatmány szerint kifejtve pedig:

$$(1-3x)^{1/3}=1-\frac{1}{3}.3x-\frac{1.2.}{3.6.}9x^2-\frac{1.2.5}{3.6.9}27x^3-\frac{1.2.5.8.}{3.6.9.12}.81x^4\ldots\text{ 'stb.}$$

tehát a' kétféle kifejtés öszvehasonlításából:

$$0=\left.\begin{matrix}A_0\\-1\\\end{matrix}\right.+\left.\begin{matrix}A_1\\+2A_0\\+1\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}A_2\\+2A_1\\+A_0\\+1\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}A_3\\+2A_2\\+A_1\\+5/3\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}A_4\\+2A_3\\+A_2\\+10/3\end{matrix}\right\}x^4+\ldots\text{ 'stb.}$$

honnét a' keresett ösztevők' értékei:

$$\begin{aligned}A_0&=1;\ \ldots &&=1\\A_1&=-2A_0-1.\ \ldots &&=-3\\A_2&=-2A_1-A_0-1\ . &&=4\\A_3&=-2A_2-A_1-\frac{5}{3}\ . &&=\frac{-20}{3}\\A_4&=-2A_3-A_2-\frac{10}{3}\ . &&=6\\A_5&=-2A_4-A_3-\frac{22}{3}\ . &&=\frac{-38}{3}\end{aligned}$$

. . . .

mellyeknek helyretételével:

$$\frac{\sqrt[3]{(1-3x)}}{1+2x+x^2} = 1-3x+4x^2-\frac{20}{3}x^3+6x^4-\frac{38}{3}x^5-\ldots\ldots \text{'stb.}$$

2.) Legyen a' kifejtendő függvény $\frac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)}} = (1-x).(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots \text{'stb. leszen:}$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1-2x^2+3x^4-4x^6+5x^8-\ldots \text{'stb. honnét:}$$

$$\frac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1-x-2x^2+2x^3+3x^4-3x^5-4x^6\ldots \text{'stb. Legyen:}$$

3.) $\frac{(b+cx)^m}{(1+ax)^r} = (b+cx)^m.(1+ax)^{-r} = A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\text{'stb.}$

mivel:

$$(b+cx)^m = b^m+mb^{m-1}cx+m_2b^{m-2}c^2x^2+\ldots\ldots m_nb^{m-n}c^nx^n$$

$$(1+ax)^{-r} = 1-rax+(r+1)_2a^2x^2-\ldots\ldots\ldots \pm(r+n-1)_na^nx^n$$

következőleg:

$$(b+cx)^m.(1+ax)^{-r} = b^m + \left.\begin{matrix} mb^{m-1}c \\ -rab^m \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} m_2b^{m-2}c^2 \\ -rmab^{m-1}c \\ +(r+1)_2a^2b^m \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots\ldots \left.\begin{matrix} m_nb^{m-n}c^n \\ -rm_{n-1}ab^{m-n+1}c^{n-1} \\ +(r+1)_2m_{n-2}a^2b^{m-n+2}c^{n-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \pm(r+n-1)_na^nb^m \end{matrix}\right\} x^n$$

mellyekből az (x) hatványainak megfelelő ösztevők:

$$A_0 = b^m$$
$$A_1 = mb^{m-1}c-rab^m$$
$$A_2 = m_2b^{m-2}c^2-rmab^{m-1}c+(r+1)_2a^2b^m$$
$$A_3 = m_3b^{m-3}c^3-rm_2ab^{m-2}c^2+(r+1)_2a^2b^{m-1}c-(r+2)_3a^3b^m$$

. . . .

ismeretesekké lévén a' feladott tört függvény kivántatóképʼ kifejtethetik.

IV.) Az átalános formában $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots$ 'stb. $= 0$; tétetvén találtatik:

$\frac{1}{a_0x^m+a_1x^{m+n}+a_2x^{m+2n}+\ldots\ldots a_qx^{m+qn}}$ mint véges törek emelkedő hatványok' mentében kifejtve:

a.) $fx = A_0x^{-m}+A_1x^{n-m}+A_2x^{2n-m}+A_3x^{3n-m}+\ldots\ldots\ldots$ 'stb.

hanyatló hatványok' mentében:

b.) $fx = A_0 x^{-m-qu} + A_1 x^{-m-(q+1)u} + A_2 x^{-m-(q+2)u} + \ldots\ldots$ 'stb.

mint végetlen törek pedig csupán emelkedő hatványok' mentében:

c.) $fx = A_0 x^{-m} + A_1 x^{u-m} + A_2 x^{2u-m} + A_3 x^{3u-m} + \ldots\ldots$ 'stb.

melly egyszerűbb alkatbol részint némelly nevezetes felfejtéseket lehet előhozni, részint ennek viszonyait a' fentebbi átalános kifejtésekkel feltalálni.

Például legyen:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\ldots\text{'stb.}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots\text{'stb. leszen:}$$

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{-1}{2} A_0$$

$$A_2 = \frac{-1}{3} A_0 \quad \frac{-1}{2} A_1$$

$$A_3 = \frac{-1}{4} A_0 \quad \frac{-1}{3} A_1 \quad \frac{-1}{2} A_2$$

$$A_4 = \frac{-1}{5} A_0 \quad \frac{-1}{4} A_1 \quad \frac{-1}{3} A_2 \quad \frac{-1}{2} A_3$$

honnét:

$$A_0 = 1$$
$$A_1 = \frac{-1}{2}$$
$$A_2 = \frac{-1}{2.(3)!}$$
$$A_3 = \frac{-1}{4!}$$
$$A_4 = \frac{-19}{6!}$$
$$A_5 = \frac{-27}{2.(6)!}$$
$$A_6 = \frac{-863}{3.4.(7)!}$$
$$A_7 = \frac{-1375}{3(8)!}$$

$$A_8 = \frac{-33953}{(10)!}$$
$$A_9 = \frac{-57281}{2.(10)!}$$
$$A_{10} = \frac{-3250433}{(12)!}$$
$$A_{11} = \frac{-1891755}{8.(11)!}$$
$$A_{12} = \frac{-13695779093}{2.(15)!}$$
$$A_{13} = \frac{-24\,466\,579\,093}{4(15)!}$$
$$A_{14} = \frac{-2248\,808\,282\,159}{(18)!}$$

az az tizedes törtekben:

A_0	$= 1$	A_{11}	$= -\ 0{,}00592\ 40564$
A_1	$= -\ 0{,}5$	A_{12}	$= -\ 0{,}00523\ 68753$
A_2	$= -\ 0{,}08333\ 33333$	A_{13}	$= -\ 0{,}00467\ 74074$
A_3	$= -\ 0{,}04166\ 66667$	A_{14}	$= -\ 0{,}00421\ 49371$
A_4	$= -\ 0{,}02638\ 88889$	A_{15}	$= -\ 0{,}00382\ 68920$
A_5	$= -\ 0{,}01875\ 00000$	A_{16}	$= -\ 0{,}00349\ 73450$
A_6	$= -\ 0{,}01426\ 91799$	A_{17}	$= -\ 0{,}00321\ 44930$
A_7	$= -\ 0{,}01136\ 73942$	A_{18}	$= -\ 0{,}00296\ 94551$
A_8	$= -\ 0{,}00935\ 65366$	A_{19}	$= -\ 0{,}00275\ 53832$
A_9	$= -\ 0{,}00789\ 25540$	A_{20}	$= -\ 0{,}00256\ 74201$
A_{10}	$= -\ 0{,}00678\ 58500$	. ,	. . . .

2.) $$\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\text{'stb.}} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \text{ 'stb.}$$

kifejtésében a' viszony' léptéke $= -1;\ \frac{-1}{2!};\ \frac{-1}{3!};\ \frac{-1}{4!};\ \frac{-1}{5!}$ 'stb. tehát:

$A_0 = 1$	$A_6 = \frac{1}{6!}$
$A_1 = -1$	$A_7 = \frac{-1}{7!}$
$A_2 = \frac{1}{2!}$	$A_8 = \frac{1}{8!}$
$A_3 = \frac{-1}{3!}$	$A_9 = \frac{-1}{9!}$
$A_4 = \frac{1}{4!}$	$A_{10} = \frac{1}{10!}$
$A_5 = \frac{-1}{5!}$	

3.) $$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\text{ 'stb.}} = A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 \ldots \text{'stb.}$$

ebben a' visszony' léptéke $\frac{1}{2!};\ \frac{-1}{4!};+\frac{1}{6!};\ \frac{-1}{8!};+\frac{1}{10!};\ldots$ 'stb. tehát:

$$A_0 = 1 \qquad A_5 = \frac{50521}{10!}$$
$$A_1 = \frac{1}{2!} \qquad A_6 = \frac{2702765}{12!}$$
$$A_2 = \frac{5}{4!} \qquad A_7 = \frac{199360981}{14!}$$
$$A_3 = \frac{61}{6!} \qquad A_8 = \frac{19391512145}{16!}$$
$$A_4 = \frac{1385}{8!} \qquad \ldots\ldots\ldots$$

4.) $$\frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \text{ 'stb}} = A_0 x^{-1} + A_1 x + A_2 x^3 + A_3 x^5 + A_4 x^7 \ldots\ldots$$

kifejtésében a' visszony' léptéke $\frac{1}{3!}$; $\frac{-1}{5!}$; $+\frac{1}{7!}$; $\frac{-1}{9!}$; $+\frac{1}{11!}$.....'stb. tehát:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{3!}; \quad A_2 = \frac{7}{3.5!}; \quad A_3 = \frac{381}{5.9!}; \quad A_4 = \frac{23510}{3.11!} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

5.) $$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

6.) $$\frac{1}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \ldots. \text{'stb.}$$

melly kifejtésekben 5.) alatt az ösztevők a' természeti számok' sorzatát; 6.) alatt pedig a' természeti számok sorzatából eredett második rangu számláló haladást terjesztik elő. Sőt átalánosabban:

Mivel az első rangu számláló haladásokban az első; a' második rangu-akban a' második; külzések egyenlők tartoznak lenni annál fogva fel tévén hogy:

$A_0\ A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots\ldots A_{n-3}\ A_{n-2}\ A_{n-1}\ A_n$; által akarmi határozatlan rangú számláló haladás jegyeztessék; az:

I-ső	$A_0 - 2A_1 + A_2 = 0$
II-dik	$A_0 - 3A_1 + 3A_2 - A_3 = 0$
III-dik	$A_0 - 4A_1 + 6A_2 - 4A_3 + A_4 = 0$
....	. . . .
IV-dik rangúakban	$A_0 - m_1 A_1 + m_2 A_2 \ldots\ldots \pm m_2 A_{n-2} \mp m_1 A_{n-1} \pm A_n = 0$ (58 lap).

következik hogy:

$$\frac{1}{1 - m_1 x + m_2 x^2 - m_3 x^3 \ldots\ldots \pm m_2 x^{n-2} \mp m_1 x^{n-1} \pm x^n} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 +$$

sorzatra kifejtésében, az ösztevők mindenkor számláló haladást terjesztenek elő; mellynek rangja egyel alacsonyabb az $(1-x)^m$ megfelelő hatványánál honnét a' viszonylépték vétetett. Magában látható lévén egyébiránt az is, hogy a' hason nemű törekekben;

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots\ \text{'stb.}}{a_0-m_1x+m_2x^2-m_3x^3\ldots\ldots\pm m_2x^{n-2}\mp m_1x^{n-1}\pm x^n};$$ az állandó törvénynek (172 lapon) mondottakhoz képest valahol be kelletvén állani: szintúgy ezeknek kifejtésében is, valahol elkezdvén, azontúl az ösztevőknek egymásután valami felsőbb rangú számláló haladás mentében szükség következniök; 's viszont azon sorzatoknak, mellyekben az ösztevők valamelly határozatlan tagon túl folyvást felsőbb rangú számláló haladást képeznek; mondott formáju törekből kell eredniök.

V.) Azon öszvefüggésnek átlátására továbbá, mellyből akarmi törekből származott sorzatok' ösztevői; az egyszerűbb $\frac{1}{a_0x^m+a_1x^{m+n}+a_2x^{m+2n}+\ldots\ \text{'stb.}}$ törekből kifejtett sorzatok' ösztevőivel állanak, tétessék:

$$\frac{1}{a_0x^m+a_1x^{m+n}+a_2x^{m+2n}+\ldots\ \text{'stb.}}=A_0+A_1+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots\ \text{'stb. és}$$

$$\frac{\alpha_0x^r+\alpha_1x^{r+n}+\alpha_2x^{r+2n}+\ldots\ldots\text{'stb.}}{a_0x^m+a_1x^{m+n}+a_2x^{m+2n}+\ldots\ldots\text{'stb.}}=A_0'+A_1'x+A_2'x^2-A_3'x^3+\ldots\ldots\ \text{'stb}$$

mellyeknél fogva kell lenni:

$$A_0'+A_1'x+A_2'x^2+A_3'x^3+A_4'x^4+\ldots\text{'stb.}=\alpha_0x^r+\alpha_1x^{r+1}+\alpha_2x^{r+2}+\ldots\text{'stb.}$$
$$(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ \text{'stb.})$$

tehát a' kivántató szorozás végre hajtásából:

$$A_0'=\alpha_0A_0$$
$$A_1'=\alpha_0A_1+\alpha_1A_0$$
$$A_2'=\alpha_0A_2+\alpha_1A_1+\alpha_2A_0$$
$$A_3'=\alpha_0A_3+\alpha_1A_2+\alpha_2A_1+\alpha_3A_0$$
$$A_4'=\alpha_0A_4+\alpha_1A_3+\alpha_2A_2+\alpha_3A_1+\alpha_4A_0$$

melly egyenletekből, ha valamelly adott sorzatnak megfelelő törekben, vagy az α_0, α_1; α_2; ..... 'stb. vagy az a_0; a_1; a_2..... 'stb. értékei tudva vannak, az ismeretes α-kból az ismeretlen viszonyléptéket és megforditva; mint azt a' következendőkben előadandjuk, könnyü feltalálni. Ezenkivül a' kiszámítások egybehasonlítására szolgálhatnak. Például legyen:

$$\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ldots\ldots\text{'stb.}}{x\quad\frac{-x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ \frac{-x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots\text{'stb.}}=A_0'x^{-1}+A_1'x+A_2'x^3A_3'x^5+\text{'stb}+$$

találtatik:

$$A_0' = 1$$
$$A_1' = \alpha_1 - a_1$$
$$A_2' = \alpha_2 - a_1 A_1 - a_2$$
$$A_3' = \alpha_3 - a_1 A_2 - a_2 A_1 - a_3$$
$$A_4' = \alpha_4 - a_1 A_3 - a_2 A_2 - a_3 A_1 - a_4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

az az: mivel $\alpha_1 - a_1 = \frac{-2}{3!}$; $\alpha_2 - a_2 = \frac{4}{5!}$; $\alpha_3 - a_3 = \frac{-6}{7!}$ 'stb.

$$A_0' = 1$$
$$A_1' = \frac{-2}{3!}$$
$$A_2' = \frac{4}{5!} - a_1 A_1$$
$$A_3' = \frac{-6}{7!} - a_1 A_2 - a_2 A_1$$
$$A_4' = \frac{8}{9!} - a_1 A_3 - a_2 A_2 - a_3 A_1$$

. . . . 'stb. honnét:

$$A_0' = 1; \qquad A_4' = \frac{-1}{30} \cdot \frac{2^8}{8!}$$
$$A_1' = \frac{-1}{6} \cdot \frac{2^2}{2!} \qquad A_5' = \frac{-5}{66} \cdot \frac{2^{10}}{10!}$$
$$A_2' = \frac{-1}{30} \cdot \frac{2^4}{4!} \qquad A_6' = \frac{-691}{2730} \cdot \frac{2^{12}}{12!}$$
$$A_3' = \frac{-1}{42} \cdot \frac{2^6}{6!} \qquad A_7' = \frac{-7}{6} \cdot \frac{2^{14}}{14!}$$

. . . . melly kifejtésben, a' (2)nek páros hatványai előtt a' Bernoullirol nevezett számok állanak. 'S ezekkel mindenben egyezőleg találtatik: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_2 = \frac{-1}{2!}$; $\alpha_3 = \frac{1}{4}$; $\alpha_4 = \frac{-1}{6}$ 'stb és $A_0 = 1$; $A_1 = \frac{1}{3}$; $A_2 = \frac{7}{3.5!}$ 'stb. fentebb (148 lap. 4. a.att) kitalált értékeivel:

$$A_0' = \alpha_0 A_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 1.$$

$$A_1' = \alpha_0 A_1 + \alpha_1 A_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \frac{-1}{6} \cdot \frac{2^2}{2!}$$

$$A_2' = \alpha_0 A_2 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \frac{-1}{30} \cdot \frac{2^4}{4!}$$

$$A_3' = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \frac{-1}{42} \cdot \frac{2^6}{6!}$$

$$A_4' = \alpha_0 A_4 + \alpha_1 A_3 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_1 + \alpha_4 A_0 \quad . \quad . \quad = \frac{-1}{30} \cdot \frac{2^8}{8!}$$

. . . .

V.) Ha a' töreknek számítója a' nevezővel tökéletesen osztható akkor a' sorzatnak meg kell szakadni, és a' végetlen sorzat helyett a' változó hatványai szerint elrendelt véges függvény jő szinre; melly körülménynek elitélése azonban, kapcsolatban áll a' felsőbb egyenletek' feloldását tárgyazó tanitmányokkal.

Például legyen:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = A_0 + A_2 x$$

adva lesznek a' következő egyenletek:

$$\alpha_0 = a_0 A_0 \qquad = -24 \quad \text{mellyből:} \ A_0 = \frac{\alpha_0}{a_0}$$

$$\alpha_1 = a_0 A_1 + a_1 A_0 = \ 26$$

$$\alpha_2 = a_1 A_1 + a_2 A_0 = -9$$

$$\alpha_3 = a_2 P_1 \quad . \quad . \quad . \ 1 \quad \text{honnét ha } a_2 = 1; \ A_1 = 1$$

következőleg: $\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a_0 + \frac{a_1 \alpha_0}{a_0} \\ \alpha_2 &= a_1 + \frac{\alpha_0}{a_0} \end{aligned}\right\}$ mellyekből: $a_0^3 - \alpha_1 a_0^2 + \alpha_0 \alpha_2 a_0 - \alpha_0^2 = 0$ a' jelen példában: a.) $a_0^3 - 26a_0^2 + 216a_0 - 576 = 0$

Ha tehát a_0-nak ollyan értéke ismeretes lenne, mellyel az utóbbi egyenlet 0-ba válnék; abbol az a_1 meghatároztatván a' keresett osztóra akadnánk. Jelen példában illyen érték volna $a_0 = 6$; mellynek helyretételével $a_1 = \alpha_2 \frac{-\alpha_0}{6} = -5$

és: $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 26x^3 - 24}{6 - 5x + x^2} = -4 + x$ a' maga nevezőjével tökéletesen osztható.

Hasonlatosképen ha A_o kerestetik, a' fentebbi egyenletekben $\frac{\alpha_o}{a_o}$ helyébe A_o-t vissza állitván találtatnék b.) $\alpha_o - \alpha_1 A_o + \alpha_2 A_o^2 - A_o^3 = 0$; mellyböl következik hogy A_o; az x-el egyenlő értékű ellenkező jeggyel illetett mennyiség. Továbbá ha $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; az a.) egyenletböl következik:

$$a_o^3 = \alpha_o^2;\ a_o = \alpha_o^{2/3};\ a_1 = \frac{-\alpha_o}{\alpha_o^{2/3}} = -\alpha_o^{1/3}$$

a' b.) alatti egyenletböl pedig: $\alpha_o^{1/3} = A_o$; tehát első esetben:

$$\frac{\pm x^3 \pm \alpha_o}{\pm \alpha_o^{2/3} \pm \alpha_o^{1/3} x \pm x^2};$$ másodikban $$\frac{\pm x^3 \pm \alpha_o}{\pm \alpha_o^{1/3} \pm x}$$ a' maga nevezőjével tökéletesen osztható.

Annakokáért a' b.) alatti egyenletből látható lévén, hogy azon esetben midőn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots$ 'stb. $= 0$; következőleg a' feladott függvény $x^n - a^n$; egy osztónak bizonyosan kell lenni $x - a$; és igy $\frac{x^n - a^n}{x - a}$; kifejtésének valahol szükségképen félbe szakadni; innét (n)-nek különösebb értékeire nézve tétessék:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots \text{'stb. leszen:}$$

$$0 = \begin{array}{c} aA_o \\ +a^n \end{array} \begin{array}{c} -aA_1 \\ -A_o \end{array}\Big\} x \begin{array}{c} -aA_2 \\ +A_1 \end{array}\Big\} x^2 \begin{array}{c} -aA_3 \\ +A_2 \end{array}\Big\} x^3 \begin{array}{c} -aA_4 \\ +A_3 \end{array}\Big\} x^4 \ldots \begin{array}{c} -aA_n \\ \ldots\ldots + A_{n-1} \\ -1 \end{array}\Bigg\} x^n \begin{array}{c} -aA_{n+1} \\ +A_n \end{array}$$

honnét:

$$A_o = a^{n-1};\quad A_1 = a^{n-2};\quad A_2 = a^{n-3} \ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-2} = a\ ;\quad A_{n-1} = 1\ ;\quad A_n = 0;\quad A_{n+1};\quad A_{n+2} \ldots = 0; \text{ az az:}$$

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 \ldots\ldots + a^2 x^{n-3} + a x^{n-2} + x^{n-1}$$

tehát megfordított rendel iratván:

$$1.)\quad \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-3} x^2 + a^{n-2} x + a^{n-1}$$

mellyben ha (a) helyett (— a) tétetik:

$$\frac{x^n - (-a)^n}{x + a} = x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} \ldots\ldots \pm a^{n-2} x \mp a^{n-1}$$

tehát páros számnak megfelelőleg (n) helyett 2r-et tévén:

$$2.)\quad \frac{x^{2r}-a^{2r}}{x+a} = x^{2r-1} - ax^{2r-2} + a^2x^{2r-3} - a^3x^{2r-4} \ldots\ldots + a^{2r-2}x - a^{2r-1}$$

páratlan számra $n = 2r + 1$-el:

$$3.)\quad \frac{x^{2r+1}+a^{2r+1}}{x+a} = x^{2r} - ax^{2r-1} + a^2x^{2r-2} \ldots\ldots\ldots - a^{2r-1}x + a^{2r}$$

Ezeken kivül az 1.)-böl találtatik:

$$\frac{x-a}{x^n-a^n} = \frac{1}{x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}}$$

annál fogva (a) helyett $a^{\frac{1}{n}}$; x helyett $x^{\frac{1}{n}}$ tétetvén·

mivel $x^{\frac{1}{n}\cdot(n-1)} = x^{1-\frac{1}{n}}$'s azonképen: $a^{\frac{1}{n}\cdot(n-1)} = a^{1-\frac{1}{n}} \ldots$ 'stb.

$$4.)\quad \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x-a} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}}x^{1-\frac{2}{n}} + a^{\frac{2}{n}}x^{1-\frac{3}{n}} \ldots\ldots a^{1-\frac{2}{n}}x^{\frac{1}{n}} + a^{1-\frac{1}{n}}}$$

honnét:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x-a} = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}}{x-a} = \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{a}\sqrt{x}+\sqrt{a}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a^3}}$$

. . . . 'stb.

Előadatván eddigiekben hogy minden algebrai tört függvényt, a' belé-foglalt változónak emelkedő vagy hanyatló hatványai szerint elrendelt sorzatokra lehet kifejteni; ennekutánna önként azon kérdés támad, hogy viszont megfordítva miképen lehessen azon eredeti tört függvényt, mellyből valamelly adott visszafutó sorzatnak származni kelletett feltalálni. Mellyhez képest elsőben egyes eseteken kezdvén szemléleteinket:

I.) Ha a' feladott sorzat első rangú visszafutó; miután a' tagok' egymásbol származtának állandó törvénye beállott (172 lap) kell lenni azontul mindenütt:

$A_n = a_1A_{n-1}$; $A_{n+1} = a_1A_n$; $A_{n+2} = a_1A_{n+1} \ldots$ 'stb. tehát:

$$a_1 = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} \ldots \text{ 'stb. mellyből következik:}$$

a.) Hogy az első rangu visszafutó sorzatok átalános ismertetménye, midőn az egymásutáni tagok' hanyadosai valahol elkezdvén azontul egymással mindenkor egyenlők.

b.) Azon folyvást egyenlő hanyadosok az első rangu visszafutó sorzat' viszonyléptéket teszik, melly helyretétetvén annak értékével

c.) Kell lenni a' megfelelő töreknek $\frac{fx}{a_0 + a_1 x}$ vagy (178 lap) $\frac{fx}{1 + a_1 x}$ holott is fx mind eddig ismeretlen függvénye (x)-nek; a_0 pedig határozatlan lévén (178 lap értelmében) tétethetik $= 1$. Mellyek után:

d.) A' visszony lépték feltaláltatván, 's abbol $\frac{1}{1 + a_1 x} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots$ 'stb. kifejtésében akarmennyi kivántató ösztevők ismeretesekké lévén a' (185 lapon) adott egyenletek' segedelmével α_0; α_1; $\alpha_2 \ldots$ 'stb. értékeit és igy az eddig ismeretlenül maradt függvény' formáját könnyü meghatározni.

Például: Legyen a' feladott visszafutó sorzat:

1.) $S = 3 + 6x + 12x^2 + 24x^3 + 48x_4 + 96x^5 \ldots$ 'stb.

találtatik: $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} \ldots$ 'stb. $= 2$

mellyböl a' visszony lépték $= 2$ és $a_1 = -2$

honnét: $\frac{1}{1 - 2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 \ldots$ 'stb.

tehát tétetvén: $\begin{cases} A_0' = 3; & A_1' = 6; & A_2' = 12; & A_3' = 24 \ldots \text{'stb.} \\ A_0 = 1; & A_1 = 2; & A_2 = 4; & A_3 = 8 \ldots \text{'stb.} \end{cases}$

kell lenni: $A_0' = \alpha_0 A_0$ az az: $3 = \alpha_0$

$A_1' = \alpha_0 A_1 + \alpha_1 A_0$ $\qquad 6 = 6 + \alpha_1$

$A_2' = \alpha_0 A_2 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_0$ $\qquad 12 = 12 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2$

. . . .

mellyekböl lévén $\alpha_0 = 3$; $a_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots$ 'stb. $= 0$; következik:

$$S = 3 + 6x + 12x^2 + 24x^3 + 48x^4 + \ldots \text{'stb.} = \frac{3}{1 - 2x}$$

2.) $S = \frac{1}{5} + \frac{4}{25}x + \frac{51}{125}x^2 + \frac{194}{625}x^3 - \frac{1164}{3125}x^4 + \frac{6984}{15625}x^5 - \frac{41904}{78125}x^6 \ldots$ 'stb.

$= A_0' + A_1' x + A_2' x^2 + A_3' x^3 + A_4' x^4 + A_5' x^5 + A_6' x^6$

ebben: $\frac{A_5'}{A_4'} = \frac{A_6'}{A_5'} \ldots$ 'stb. $= \frac{-6}{5}$ mellynél fogva tétetvén:

$$\frac{1}{1+\frac{6}{5}x} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + A_6x^6 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{36}{25}x^2 - \frac{216}{125}x^3 + \frac{1296}{625}x^4 - \frac{7776}{3125}x^5 + \frac{46656}{15625}x^6 \ldots \text{'stb.}$$

mellyekből:

$$\frac{1}{5} = A_0' = \alpha_0 A_0 \qquad \text{az az:} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{25} = A_1' = \alpha_0 A_1 + \alpha_1 A_0 \;\ldots\ldots\ldots\; a_1 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{51}{125} = A_2' = \alpha_0 A_2 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_0 \;\ldots\ldots\; \alpha_2 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{194}{625} = A_3' = \alpha_0 A_3 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_0 \;\ldots\; \alpha_3 = \frac{4}{5} \quad \text{tehát:}$$

$$S = \frac{1}{5} + \frac{4}{25}x + \frac{51}{125}x^2 + \frac{194}{625}x^3 - \frac{1164}{3125}x^4 + \frac{6984}{15625}x^5 - \frac{41904}{78125}x^6 \ldots \text{'stb.}$$

$$= \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}x^3}{1+\frac{6}{5}x} = \frac{1+2x+3x^2+4x^3}{5+6x}$$

3.) Kerestessék 0,7777.... tizedes töreknek értéke lesz:

$$S = \frac{7}{10} + \frac{7}{100}x + \frac{7}{1000}x^2 + \frac{7}{10000}x^3 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

mellyben a' viszonylépték $= \frac{1}{10}$; és a' fentebbiekhez mindenben hasonlatosképen:

$$S = \frac{7}{10} + \frac{7}{100}x + \frac{7}{1000}x^2 + \frac{7}{10000}x^3 + \ldots\ldots \text{'stb.} = \frac{7}{10-x}$$

az az: x-nek $= 1$ értékével: $0,7777\ldots\ldots = \frac{7}{9}$

4.) Nem különben egyéb vissza kerülő tizedes törekekre nézve is például:

$$S = \frac{81}{100} + \frac{81}{10000}x + \frac{81}{1000000}x^2 + \frac{81}{100000000}x^3 \ldots\ldots \text{'stb.} = \frac{81}{100-x}$$

ebben a' viszony lépték $= \frac{1}{100}$; tehát x-nek $= 1$ értékével:

$$0,81818181\ldots\ldots \text{'stb.} = \frac{9}{11}$$

II.) Hasonlatosképen a' második ranguakra nézve, miután azoknak állandó törvényük beállott; kell lenni:

$A_n = -a_1A_{n-1} - a_2A_{n-2}$; $A_{n+1} = -a_1A_n - a_2A_{n-1}$; $A_{n+2} = -a_1A_{n+1} - a_2A_n$ 'stb.

melly egyenletek' feloldásából:

$$a_2 = \frac{A_{n+1}.A_{n-1} - A_n^2}{A_n.A_{n-2} - A_{n-1}^2} = \frac{A_n.A_{n-2} - A_{n-1}^2}{A_{n-1}.A_{n-3} - A_{n-2}^2} = \frac{A_{n-1}.A_{n-3} - A_{n-2}^2}{A_{n-2}.A_{n-4} - A_{n-3}^2}, \ldots \text{'stb.}$$

Minekokáért: formáltassék az adott visszafutó sorzat' ösztevőiből, egy másik, az a_2 értékének számítója szerint; ha azoknak hanyadosai valahol elkezdvén, azontúl folyvást egyenlők: azon feladott sorzat a' második rangú visszafutók közé tartozik. Például legyen:

1.) $S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + \ldots\ldots$ 'stb. leszen:

$$\left.\begin{matrix} 5.7-6^2; & 6.4-5^2; & 5.3-4^2; & 4.2-3^2; & 3.1-2^2 \ldots\text{'stb.} \\ =-1\ ; & -1\ ; & -1\ ; & -1\ ; & -1\ \ldots\text{'stb.} \end{matrix}\right\}\text{mellyekből:}$$

$$a_2 = 1;\ a_1 = \frac{A_n + a_2A_{n-2}}{-A_{n-1}} = -2;$$

III.) Ha vagy a' viszony léptéke, vagy az eredeti törek' számítójának ösztevői adatnak, a' (185 lapon) előadott egyenletek' segedelmével az A_0; A_1; $A_2 \ldots$ 'stb. ösztevők előleges meghatározása után, a' feladás megoldása csupán egyszerű egyenletek' közbejöttével könnyüvé válik. Példák:

1.) $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x_4 + 6x^5 + 7x^7 + \ldots\ldots$ 'stb.

mellyben tudva legyen $a_1 = -2$; $a_2 = 1$;

leszen elsőben $A_0 = 1$; $A_1 = 2$; $A_2 = 3$; $A_4 = 4\ldots$ 'stb.

és mivel: $A_0' = 1 = \alpha_0A_0 \ldots\ldots$ találtatik: $\alpha_0 = 1$

$A_1' = 2 = \alpha_0A_1 + \alpha_1A_0$ $\quad \alpha_1 = 2 - A_1 = 2 - 2 = 0$

$A_2' = 3 = \alpha_0A_2 + \alpha_1A_1 + \alpha_2A_0$ $\quad \alpha_2 = 3 - A_2 = 3 - 3 = 0$

. . . .

mellyekből: a' feladott sorzatnak megfelelő törek:

$$S = \frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

2.) $S = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x + \frac{37}{27}x^2 + \frac{146}{81}x^3 + \frac{409}{243}x^4 \ldots\ldots\ldots$ 'stb.

sorzatrol tudva legyen: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 3$; $\alpha_3 = 4$; $\alpha_4 = \alpha_5 \ldots$ 'stb. $= 0$;

leszen elsőben: $A_0' = \frac{1}{3} = \frac{1}{a_0}$; honnét $a_0 = 3$; $A_0 = \frac{1}{3}$

$$A_1' - \alpha_1 A_0 = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{9} = A_1$$

$$A_2' - \alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_0 = \frac{37}{27} + \frac{2}{9} - 1 = \frac{16}{27} = A_2$$

$$A_3' - \alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_1 - \alpha_3 A_0 = \frac{146}{81} - \frac{32}{27} + \frac{3}{9} - \frac{4}{3} = \frac{-31}{81} = A_3$$

$$A_4' - \alpha_1 A_3 - \alpha_2 A_2 - \alpha_3 A_1 = \frac{409}{243} + \frac{62}{81} - \frac{48}{27} + \frac{4}{9} = \frac{271}{243} = A_4$$

. . . .

és mivel $A_0 = \frac{1}{3} = \frac{1}{a_0}$ találtatik: $a_0 = 3$

$A_1 = \frac{-1}{9} = \frac{-a_1 A_0}{a_0}$ $a_1 = 1$

$A_2 = \frac{16}{27} = \frac{-a_1 A_1 - a_2 A_0}{a_0}$ $a_2 = -5$

$A_3 = \frac{-31}{81} = \frac{-a_1 A_2 - a_2 A_1 - a_3 A_0}{a_0}$; $a_3 = 0$

$A_4 = \frac{271}{243} = \frac{-a_1 A_3 - a_2 A_2 - a_3 A_1 - a_4 A_0}{a_0}$; $a_4 = 0$

. . . .

mellyeknél fogva a' feladott sorzatnak megfelelő törek:

$$S = \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{3 + x - 5x^2}$$

IV.) Ha a' sorzat' ösztevői valahol elkezdvén azontul folyvást akarmi rangu számláló haladást formálnak; azon esetben a' viszony léptéknek az $(1 - a)^n$ kifejtéséből kellett vétetni: (184 lap) melly annál fogva a' számláló haladás rangjából tudva lévén, a' törek' formáját a' fentebbi III.) szám alatt előadottak szerint kitalálhatni. Például:

1.) $S = 3 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \ldots\ldots$ 'stb.

ebben: az ösztevők első rangu számláló haladást formálván a' viszony lépték $(1-a)^m$ kifejtéséből (m)-nek $= 2$ értékével: $a_1 = -2$; $a_2 = 1$; tehát formáltassék:

elsőben: $A_0 = 1$; $A_1 = 2$; $A_2 = 3$; $A_3 = 4$; $A_5 = 5 \ldots\ldots$ 'stb.

innét: $A_0' = 3 = \alpha_0 A_0$ mellyekből: $\alpha_0 = 3$

$A_1' = 1 = \alpha_0 A_1 + \alpha_1 A_0$ $\alpha_1 = -5$

$A_2' = 2 = \alpha_0 A_2 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_0$ $\alpha_3 = 3$

$A_3' = 3 = \alpha_0 A_3 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_0$ $\alpha_4 = 0$

. . . .

$$\text{tehát } S = \frac{3 - 5x + 3x^2}{1 - 2x + x^2}$$

2.) $S = 1 + 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + \ldots$ 'stb.

ebben az ösztevők harmadik rangu számláló haladást formálván, az $(1 - a)^4$ kifejtéséből következik:

$a_1 = -4$; $a_2 = 6$; $a_3 = -4$; $a_4 = 1$ honnét:

$A_0 = 1$; $A_1 = 4$; $A_2 = 10$; $A_3 = 20$; $A_4 = 35$; $A_5 = 56$;... 'stb.

továbbá: $A_0' = 1 = \alpha_0 A_0$ mellyekből $\alpha_0 = 1$

$A_1' = 4 = \alpha_0 A_1 + \alpha_1 A_0$ $\alpha_1 = 0$

$A_2' = 15 = \alpha_0 A_2 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_0$ $\alpha_2 = 5$

$A_3' = 40 = \alpha_0 A_3 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_0$ $\alpha_3 = 0$

$A_4' = 85 = \alpha_0 A_4 + \alpha_1 A_3 + \alpha_2 A_3 + \alpha_3 A_1 + \alpha_4 A_0$ $\alpha_4 = 0$

. . . .

$$\text{tehát } S = \frac{1 + 5x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}$$

Vagy más móddal: tétessék a' sorzatban,

$S = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots\ldots$ 'stb.

$$x = \frac{y}{1+y} \text{ mellyből: } y = \frac{x}{1-x} \text{ következik:}$$

$$\begin{array}{l}
x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \ldots\ldots \text{'stb.} \\
x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 5y^6 - 7y^7 + \ldots\ldots \text{'stb.} \\
x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \ldots\ldots \text{'stb.} \\
x^4 = y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \ldots\ldots \text{'stb.}
\end{array}$$

. . . .

melly értékek' helyettezésével:

$$S = A_0 + A_1 y \left.\begin{array}{r} - A_1 \\ + A_2 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{r} + A_1 \\ -2A_2 \\ + A_3 \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{r} - A_1 \\ +3A_2 \\ -3A_3 \\ + A_4 \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{r} + A_1 \\ -4A_2 \\ +6A_3 \\ -4A_4 \\ + A_5 \end{array}\right\} y^5 \ldots\ldots\ldots$$

Ha tehát a' sorzat' ösztevői: A_1; A_2; A_3; A_4.... 'stb. számláló haladást formálnak, kelletvén lenni valahol: $A_1 - m_1 A_2 + m_2 A_3 - m_3 A_4 \ldots$ 'stb. $= 0$; a' törek' értéke véges kitételben tünik elő, és $y = \frac{x}{1-x}$ helyre tételével a' feladott visszafutó sorzatnak megfelel. Igy: az 1.) példában volna:

$$A_0 = 3;\ A_1 = 1;\ A_2 - A_1 = 1;\ A_1 - 2A_2 + A_3 = 0; \ldots\ \text{mellyekböl:}$$

$$S = 3 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{3 - 5x + 3x^2}{1 - 2x + x^2}$$

Hasonlatosképen a' 2.) példában:

$$S = 1 + \frac{4x}{1-x} + \frac{11x^2}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{1+5x}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}$$

mint már legközelebb is találtatott.

V.) Minthogy a' határozatlan formáju $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_r x^r}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_s x^s}$ törekben; az $(r+s+1)$ számmal előforduló ismeretlen mennyiségek' meghatározhatására ugyan annyi egyenletek kivántatnak: megfordítva következtethetjük, hogy valamelly visszafutó sorzatnak (n) számu tagai adatván, azokbol a' megfelelő törek' alakját csak akkor lehet feltalálni ha $r + s + 1 = n$ az az: $r + s = n - 1$. Mellyhez képest a' sorzat' bizonyos (n) számu tagaibol meghatároztatható törek' formáját előlegesen felvévén:

$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_r x^r}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_s x^s}$; mellyben $r = s = \frac{n-1}{2}$; adva lesznek a' következő egyenletek: (lap).

$$\begin{aligned}
A_{r+1} &= -a_1 A_r - a_2 A_{r-1} - a_3 A_{r-2} \ldots - a_r A_1 \\
A_{r+2} &= -a_1 A_{r+1} - a_2 A_r - a_3 A_{r-1} \ldots - a_r A_2 \\
A_{r+3} &= -a_1 A_{n+2} - a_2 A_{r+1} - a_3 A_r \ldots - a_r A_3 \\
&\ldots \\
A_n &= -a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} - a_3 A_{n-3} \ldots - a_r A_{r+1}
\end{aligned}$$

mellyekböl elsőben ugyan az a_1; a_2; a_3.... 'stb. annak utánna pedig előadott módokon az α_0; α_1; α_2.... 'stb. értékeit feltalálhatni. Például:

$$S = 3 - 8x + 17x^2 - 28x^3 + 40x^4 - 46x^5 + 36x^6 \ldots\ \text{'stb.}$$

ebben: $\frac{n-1}{2} = 3 = r = s$; következőleg az adott tagokbol a' megfelelő töreket, csak azon feltétel alatt lehet meghatározni ha ezen formában:

$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}$; befoglaltatik. Így pedig az adott egyenletek lesznek:

$$A_4 = 40 = 28a_1 - 17a_2 + 8a_3$$
$$A_5 = -46 = -40a_1 + 28a_2 - 17a_3$$
$$A_6 = 36 = 46a_1 - 40a_2 + 28a_3$$

tehát a' két első egyenletből: $a_1 = \frac{40 + 17a_2 - 8a_3}{28} = \frac{46 + 28a_2 - 17a_3}{40}$

honnét: $a_2 = \frac{78 + 39a_3}{26}$; $a_1 = \frac{2366 + 455a_3}{728}$

melly értékek' helyretételével az utolsó egyenletből: $14a_3 = 18 - 23a_1 + 20a_2$

találtatik: $a_3 = \frac{30758}{-15379} = -2$; $a_2 = 0$; $a_1 = 2$;

mellyek után az ismeretessé lett viszony léptékkel formáltatván:

$$\frac{1}{1 + 2x - 2x^3} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 \ldots\ldots \text{'stb.}$$
$$= 1 - 2x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4 \ldots\ldots \text{'stb.}$$

leszen:

$3 = \alpha_0$	mellyekből:	$\alpha_0 = 3$
$-8 = \alpha_0 A_1 + \alpha_1$		$\alpha_1 = -2$
$17 = \alpha_0 A_2 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2$		$\alpha_2 = 1$
$-28 = \alpha_0 A_3 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1 + \alpha_3$		$\alpha_3 = 0$
$40 = \alpha_0 A_4 + \alpha_1 A_3 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_1 + \alpha_4$		$\alpha_4 = 0$

. . . .

's végezetre: $S = \frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3}$

VI.) *Lagrange* által az öntörekek' feltalálására (mellyekben a' nevező hatványai a' számítóénál magosabbra hágnak) adott mód ebben áll; Legyen:

$S = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots\ \ldots\ \text{'stb.}$

's mint feltettük a' sorzatnak megfelelő határozatlan öntörek:

$$S = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots \alpha_r x^r}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots a_{r+1} x^{r+1}};\ \text{kell lenni:}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_{r+1} x^{r+1}}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots \alpha_r x^r} = \frac{1}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots \text{'stb.}}$$

tehát mind a' véges, mind a' végetlen törekben, valóságos osztással a' hanyados' két első tagát keresvén, mellyet tegyünk általánosan $= p + qx$

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{a_0'x^2 + a_1'x^3 + a_2'x^4 + \ldots\ldots + a_{r+1}'x^{r+1}}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_r x^r}$$

$$= p + qx + \frac{A_0'x^2 + A_1'x^3 + A_2'x^4 + A_3'x^5 + \ldots\ldots\ldots\text{'stb.}}{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 \ldots\ldots\ldots\text{'stb.}} \quad \text{vagy:}$$

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{(a_0' + a_1'x + a_2'x^2 + \ldots\ldots a_{r-1}'x^{r-1})x^2}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots \alpha_r x^r}$$

$$= p + qx + \frac{(A_0' + A_1'x + A_2'x^2 + A_3'x^3 + A_4'x^4 + \ldots\ldots\text{'stb.})x^2}{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots\text{'stb.}}$$

honnét: $A_0' + A_1'x + A_2'x^2 + A_3'x^3 \ldots\ldots$ 'stb. S'-el jegyeztetvén:

$$\frac{(a_0' + a_1'x + a_2'x^2 + \ldots\ldots a_{r-1}'x^{r-1})x^2}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots \alpha_r x^r} = \frac{S'x^2}{S}$$

's ezen utolsó kitételből következik: hogy mivel az S'-nek megfelelő véges kitételben az eredeti törek' számítójánal eggyel kevesebb tagnak kell lenni; azon esetben ha a' sorzat első rangu vissza futó volna, mellynek $\frac{\alpha_0'}{a_0 + a_1 x}$ ből kellett származni, a' maradékban egy tag sem lévén (x^2)-vel szorozható $0.x^2 = S'x^2$ az az: $S' = 0$; vagy is a' végetlen osztásnak maradék nélkül kellett elvégeztetni.

Szintén azon okbol bébizonyulván, hogy ha valami maradék fenthagyatott, akkor a' sorzat öntörekből eredett első rangu nem lehet; valamint egyszersmind az is, hogy ha felsőbb rangu lett volna, a' végre hajtott osztás után ismét öntöreknek szükség fent maradni; leszen az osztás megújításával:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots \alpha_r x^r}{a_0' + a_1' + a_2'x^2 + \ldots\ldots a_{r-1}'x^{r-1}} = p' + q'x + \frac{S''}{S'}x^2$$

melly hanyadosról és maradékrol ismét a' fentebbi következtetések találván helyet, az öntörekből eredett másod rangu visszafutó sorzatban a' fenthagyott maradéknak kell lenni

$$\frac{a_0'}{\alpha_0 + \alpha_1 x}.\,x^2 = \frac{S'}{S}x^2; \quad \text{innét:}\ \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0'} = p' + q'x + 0.x^2 = p' + qx' + \frac{S}{S'}x^2$$

$$\text{mellyből}\ \frac{S}{S'} = 0.$$

Átalában tehát a' hasonlatos okoskodásokat határozatlanul tovább folytatván; ha valamelly adott sorzat, öntörekből eredett akarhanyadik rangu visszafutó, az előadott munkálatok' ismételt megújításával:

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S}x^2$$

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''}{S'}x^2$$

$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x + \frac{S'''}{S''}x^2$$

. . . .

mig nem végre $\frac{S^{(n-1)'}}{S^{n'}}$ semmi maradékot nem hagyván:

$\frac{S^{(n-1)'}}{S^{n'}} = p^{n'} + q^{n'}x$; utolsó egyenletből minden előtteni ismeretlenek meghatározhatók lévén, az öntörekből származott visszafutó sorzatot a' maga eredeti formájára vissza vihetjük. Például legyen:

1.) $S = 1 + 2x + 8x^2 - 28x^3 + 100x^4 + 356x^5 + \ldots\ldots$ 'stb.

találtatik első osztással $\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S}x^2 = 1 - 2x + \frac{(-4 - 12x - 44x^2 - 156x^3 - \text{stb})x^2}{1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + \text{'stb.}}$

második osztással $\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''}{S'}x^2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}x$

melly szerint a' második osztás semmi maradékot nem hagyván, a' sorzat öntörekből eredett második rangu vissza futó.

Ezenkivül: $\frac{S}{S'} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}x$ honnét: $\frac{S'}{S}x^2 = \frac{4x^2}{x - 1}$

továbbá: $\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S}x^2 = 1 - 2x + \frac{4x^2}{x - 1} = \frac{-1 + 3x + 2x^2}{-1 + x}$

végezetre $S = \frac{1 - x}{1 - 3x - 2x^2}$

2.) $S = 1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - 14x^4 + 32x^5 - 62x^6 + 128x^7 - 254x^8 +$ 'stb.

találtatik első osztással $\frac{1}{S} = 1 - 2x + \frac{(6 - 12x + 30x^2 - 60x^3 + \ldots\ldots \text{'stb.})x^2}{1 + 2x - 2x^2 + 8x^3 - 14x^4 + \ldots \text{'stb.}}$

második osztással $\frac{S}{S'} = \frac{1}{6} + \frac{2x}{3} + \frac{(1 - 2x + 5x^2 - 10x^3 + 21x^4 \ldots \text{'stb.})x^2}{6 - 12x + 30x^2 - 60x^3 + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.}}$

harmadik osztással $\frac{S'}{S''} = 6$; maradék nélkül, és igy a' sorzat öntörekből eredett harmadik rangu visszafutó.

Ezenkivül: $\frac{S'}{S''} = 6$ honnét: $\frac{S''}{S'}x^2 = \frac{x^2}{6}$

tehát: $p' + q'x + \frac{S''}{S'}x^2 = \frac{1+4x+x^2}{6}$; mellyböl: $\frac{S}{S'}x^2 = \frac{6x^2}{1+4x+x^2}$

következőleg: $\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S}{S'}x^2 = 1-2x+\frac{6x^2}{1+4x+x^2} = \frac{1+2x-x^2-2x^3}{1+4x+x^2}$

végezetre: $S = \frac{1+4x+x^2}{1+2x-x^2-2x^3}$

VII.) Hogy a' viszony léptékét 's annak segedelmével a' nemző törek' formáját azon esetekben is feltalálhassuk mellyekre az eddig előadottak ki nem terjednek; vegyük szemlélet alá a' tagok egymásbol származtának átalános törvényét mi szerint:

$$A_n = -a_1A_{n-1} - a_2A_{n-2} - a_3A_{n-3} - a_4A_{n-4} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

és állapítsuk meg a' következő eljegyzéseket:

$$P_1 = -a_1A_{n-1} - a_2A_{n-2} - a_3A_{n-3} - a_4A_{n-4} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$\overset{1}{P}_1 = -a_1A_{n-2} - a_2A_{n-3} - a_3A_{n-4} - a_4A_{n-5} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$\overset{2}{P}_1 = -a_1A_{n-3} - a_2A_{n-4} - a_3A_{n-5} - a_4A_{n-6} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

. . . .

$$P_2 = -a_2A_{n-2} - a_3A_{n-3} - a_4A_{n-4} - a_5A_{n-5} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$\overset{1}{P}_2 = -a_2A_{n-3} - a_3A_{n-4} - a_4A_{n-5} - a_5A_{n-6} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$\overset{2}{P}_2 = -a_2A_{n-4} - a_3A_{n-5} - a_2A_{n-6} - a_5A_{n-7} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

. . . .

átalánosan:

$$P_r = -a_rA_{n-r} - a_{r+1}A_{n-(r+1)} - a_{r+2}A_{n-(r+2)} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$\overset{1}{P}_r = -a_rA_{n-{}^{1}(r+1)} - a_{r+1}A_{n-(r+2)} - a_{r+2}A_{n-(r+3)} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$\overset{2}{P}_r = -a_rA_{n-(r+2)} - a_{r+1}A_{n-(r+3)} - a_{r+2}A_{n-(r+4)} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

. . . .

mellynél fogva:

$$P_1 = P_2 - a_1A_{n-1};\ \overset{1}{P}_1 = \overset{1}{P}_2 - a_1A_{n-2};\ \overset{2}{P}_1 = \overset{2}{P}_2 - a_1A_{n-3}\ldots\ldots\text{'stb.}$$

$$P_2 = P_3 - a_2A_{n-2};\ \overset{1}{P}_2 = \overset{1}{P}_3 - a_2A_{n-3};\ \overset{2}{P}_2 = \overset{2}{P}_3 - a_2A_{n-4}\ldots\ldots\text{'stb.}$$

$$P_3 = P_4 - a^3A_{n-3};\ \overset{1}{P}_3 = \overset{1}{P}_4 - a_3A_{n-4};\ \overset{2}{P}_3 = \overset{2}{P}_4 - a_3A_{n-5}\ldots\ldots\text{'stb.}$$

. . . .

tehát állani fognak a' következő egyenletek:

$A_n = P_1$; $A_n - P_1 = 0$; $= A_n - P_2 + a_1A_{n-1}$ mellyből:

$$1.)\ \frac{A_n - P_2}{-A_{n-1}} = a_1$$

Ha tehát a' sorzat első rangu visszafutó lévén, $a_2 = a_3 = a_4 \ldots$ 'stb. $= 0$ egyszersmind $P_2 = 0$ tartozván lenni: következik hogy (n)-nek minden értékeivel:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_n - P_2}{-A_{n-1}} = \dfrac{A_{n-1} - \overset{1}{P}_2}{-A_{n-2}} = \dfrac{A_{n-2} - \overset{2}{P}_2}{-A_{n-3}} \ldots\ldots \text{'stb.} \\ = \dfrac{A_n}{-A_{n-1}} = \dfrac{A_{n-1}}{-A_{n-2}} = \dfrac{A_{n-2}}{-A_{n-3}} \ldots\ldots \text{'stb.} \end{array}\right\} = a_1$$

mellyből: $A_n \,.\, A_{n-2} - A^2_{n-1} = A_{n-1} \,.\, A_{n-3} - A^2_{n-2} = A_{n-2} \,.\, A_{n-4} - A^2_{n-3} \,..\,$'stb. $= 0$ az első rangu vissza futó sorzatok ismertetménye.

Továbbá a' legközelebbi egyenletekből:

$$\frac{A_n - P_2}{A_{n-1}} \quad \frac{-(A_{n-1} - \overset{1}{P}_2)}{A_{n-2}} = A_n \,.\, A_{n-2} - A^2_{n-1} - A_{n-2}P_2 + A_{n-1}\overset{1}{P}_2 = 0$$

az az: $A_n \,.\, A_{n-2} - A^2_{n-1} - A_{n-2}P_3 + a_2A^2_{n-2} + A_{n-1}\overset{1}{P}_3 - a_2A_{n-1} \,.\, A_{n-3} = 0$

$$\text{mellyből: } \frac{A_n \,.\, A_{n-2} - A^2_{n-1} - A_{n-2}P_3 + A_{n-1}\overset{1}{P}_3}{A_{n-1} \,.\, A_{n-3} - A^2_{n-2}} = a_2$$

Hasonlatosképen mivel a' legközelebbi egyenlet, (n)-nek minden értékeivel $= a_2$ tartozik lenni; tétetvén röviditésül $M = A_n \,.\, A_{n-2} - A^2_{n-1}$;

$\overset{1}{M} = A_{n-1} \,.\, A_{n-3} - A^2_{n-2}$; $\overset{2}{M} = A_{n-2} \,.\, A_{n-4} - A^2_{n-3} \ldots$ 'stb. következik:

$$\frac{M - A_{n-2}P_3 + A_{n-1}\overset{1}{P}_3}{\overset{1}{M}} - \frac{\overset{1}{M} + A_{n-3}\overset{1}{P}_3 - A_{n-2}\overset{2}{P}_3}{\overset{2}{M}} = 0;$$

mellyböl: $M.\overset{3}{M}-\overset{1}{M}^2-\overset{2}{M}A_{n-2}P_3+(\overset{2}{M}A_{n-1}+\overset{1}{M}A_{n-3})\overset{1}{P}_3+\overset{1}{M}A_{n-2}\overset{2}{P}_3=0$

honnét az a_3-al szorzott mennyiségek' ismételt elkülönzésével:

$$\frac{M.\overset{3}{M}-\overset{1}{M}^2-\overset{2}{M}A_{n-2}P_4+(\overset{2}{M}A_{n-1}+\overset{1}{M}A_{n-3})\overset{1}{P}_4-\overset{1}{M}A_{n-2}\overset{2}{P}_4}{-\overset{2}{M}A_{n-2}.A_{n-3}+(\overset{2}{M}A_{n-1}+\overset{1}{M}A_{n-3})A_{n-4}-\overset{1}{M}A_{n-2}.A_{n-5}}=a_3$$

Ha tehát a' sorzat harmadik rangu vissza futó, a' P_4-el szorzott mennyiségek kimaradván (n)-nek $n-1$; $n-2$ ..... 'stb. értékeivel:

$$\frac{M.\overset{3}{M}-\overset{1}{M}^2}{-\overset{2}{M}A_{n-2}.A_{n-3}+(\overset{2}{M}A_{n-1}+\overset{1}{M}A_{n-3})A_{n-4}-\overset{1}{M}A_{n-2}.A_{n-5}}$$

$$=\frac{\overset{1}{M}.\overset{3}{M}-\overset{3}{M}^2}{-\overset{3}{M}A_{n-3}A_{n-4}+(\overset{3}{M}A_{n-2}+\overset{2}{M}A_{n-4})A_{n-4}-\overset{1}{M}A_{n-2}A_{n-5}}$$

a' harmadik rangu visszafutó sorzatok' ismertetménye.

Tegyük ezentúl átalánosan:

$$\frac{A-P_2}{-A}=a_1$$

$$\frac{B-\beta P_3+\beta_1\overset{1}{P}_3}{B}=a_2$$

$$\frac{C-\gamma P_4+\gamma_1\overset{1}{P}_4-\gamma_2\overset{2}{P}_4}{C}=a_3$$

$$\frac{D-\delta P_5+\delta_1\overset{1}{P}_5-\delta_2\overset{2}{P}_5+\delta_3\overset{3}{P}_5}{D}=a_4$$

$$\frac{E-\varepsilon P_6+\varepsilon_1\overset{1}{P}_6-\varepsilon_2\overset{2}{P}_6+\varepsilon_3\overset{3}{P}_6-\varepsilon_4\overset{4}{P}_6}{E}=a_5$$

. . . .

Az eddigi lehozatokbol, és a' mindig ugyan azon munkálatok' ismételt megujitásából világos; hogy a' felvett betűknek és eljegyzéseknek következő értékei lesznek:

az első rangban:

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}_n;\ \overset{1}{\mathrm{A}}=\mathrm{A}_{n-1};\ \overset{2}{\mathrm{A}}=\mathrm{A}_{n-2};\ \overset{3}{\mathrm{A}}=\mathrm{A}_{n-3}\ \ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

$$A=\mathrm{A}_{n-1};\ \overset{1}{A}=\mathrm{A}_{n-2};\ \overset{2}{A}=\mathrm{A}_{n-3};\ \overset{6}{A}=\mathrm{A}_{n-4}\ \ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

a' második rangban:

$$\mathrm{B}=\mathrm{A}.\overset{1}{A}-\overset{1}{\mathrm{A}}A\ ;\ \overset{1}{\mathrm{B}}=\overset{1}{\mathrm{A}}\overset{2}{A}-\overset{2}{\mathrm{A}}\overset{1}{A};\ \overset{2}{\mathrm{B}}=\overset{2}{\mathrm{A}}\overset{3}{A}-\overset{3}{\mathrm{A}}\overset{2}{A}\ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

$$,,=\mathrm{A}_n.\mathrm{A}_{n-2}-\mathrm{A}^2{}_{n-1};\ ,,=\mathrm{A}_{n-1}.\mathrm{A}_{n-3}-\mathrm{A}^2{}_{n-2};\ ,,=\mathrm{A}_{n-2}.\mathrm{A}_{n-4}-\mathrm{A}_{n-3}\ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

$$\beta=\overset{1}{A}\ \ ,,\ \ ,,\ ;\ \overset{1}{\beta}=\overset{2}{A}\ \ ,,\ \ ,,\ ;\ \overset{2}{\beta}=\overset{3}{A};\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$,,=\mathrm{A}_{n-2}\ ,,\ \ ,,\ ;\ =\mathrm{A}_{n-3}\ ,,\ \ ,,\ ;\ =\mathrm{A}_{n-4}\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$\beta_1=A\ \ ,,\ \ ,,\ ;\ \overset{1}{\beta}_1=\overset{1}{A}\ \ ,,\ \ ,,\ ;\ \overset{2}{\beta}=\overset{2}{A}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$,,=\mathrm{A}_{n-1}\ ,,\ \ ,,\ ;\ =\mathrm{A}_{n-2}\ ,,\ \ ,,\ ;\ =\mathrm{A}_{n-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$B=-\beta\mathrm{A}_{n-2}+\beta_1\mathrm{A}_{n-3};\ \overset{1}{B}=-\overset{1}{\beta}\mathrm{A}_{n-3}-\overset{1}{\beta}_1\mathrm{A}_{n-4};\ \overset{2}{B}=-\overset{2}{\beta}\mathrm{A}_{n-4}-\overset{2}{\beta}_1\mathrm{A}_{n-5}\ \text{'stb.}$$

$$,,=\mathrm{A}_{n-1}.\mathrm{A}_{n-3}-\mathrm{A}^2{}_{n-2}\ ,,=\mathrm{A}_{n-2}.\mathrm{A}_{n-4}-\mathrm{A}^2{}_{n-3};\ ,,=\mathrm{A}_{n-3}.\mathrm{A}_{n-5}-\mathrm{A}^2{}_{n-4}\ \text{'stb.}$$

a' harmadik rangban:

$$C=\mathrm{B}\overset{1}{B}-\overset{1}{\mathrm{B}}B;\qquad \overset{1}{C}=\overset{1}{\mathrm{B}}\overset{2}{B}-\overset{2}{\mathrm{B}}\overset{1}{B};\qquad \overset{2}{C}=\overset{2}{\mathrm{B}}\overset{3}{B}-\overset{3}{\mathrm{B}}\overset{2}{B}\ldots\ \text{'stb.}$$

$$\gamma=\overset{1}{B}\beta;\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\gamma}=\overset{2}{B}\overset{1}{\beta},\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\gamma}=\overset{3}{B}\overset{2}{\beta};\ \ ,,\ \ldots\text{'stb.}$$

$$\gamma_1=\overset{1}{B}\beta_1+B\overset{1}{\beta}\ \ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\gamma}_1=\overset{2}{B}\overset{1}{\beta}_1+\overset{1}{B}\overset{2}{\beta}\ \ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\gamma}_1=\overset{3}{B}\overset{2}{\beta}_1-\overset{2}{B}\overset{3}{\beta}\ \ldots\text{'stb.}$$

$$\gamma_2=B\overset{1}{\beta}_1\ \ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\gamma}_2=\overset{1}{B}\overset{2}{\beta}_1\ \ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\gamma}_2=\overset{2}{B}\overset{3}{\beta}_1\ \ ,,\ \ldots\text{'stb.}$$

$$C=(-\gamma\mathrm{A}_{n-3}+\gamma_1\mathrm{A}_{n-4}-\gamma_2\mathrm{A}_{n-5};\ \overset{1}{C}=(-\overset{1}{\gamma}\mathrm{A}_{n-4}+\overset{1}{\gamma}_1\mathrm{A}_{n-5}-\overset{1}{\gamma}_2\mathrm{A}_{n-6});$$

$$\overset{2}{C}=(-\overset{2}{\gamma}\mathrm{A}_{n-5}+\overset{2}{\gamma}_1\mathrm{A}_{n-6}-\overset{2}{\gamma}_2\mathrm{A}_{n-7});$$

a' negyedik rangban:

$$\mathrm{D}=\mathrm{C}\overset{1}{C}-\overset{1}{\mathrm{C}}C;\qquad \overset{1}{\mathrm{D}}=\overset{1}{\mathrm{C}}\overset{2}{C}-\overset{2}{\mathrm{C}}\overset{1}{C};\qquad \overset{2}{\mathrm{D}}=\overset{2}{\mathrm{C}}\overset{3}{C}-\overset{3}{\mathrm{C}}\overset{2}{C}\ldots\ \text{'stb.}$$

$$\delta=\overset{1}{C}\gamma;\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\delta}=\overset{2}{C}\overset{1}{\gamma};\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\delta}=\overset{3}{C}\overset{2}{\gamma}\ .\ .\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$\delta_1=\overset{1}{C}\gamma_1+C\overset{1}{\gamma}\ \ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\delta}_1=\overset{2}{C}\overset{1}{\gamma}+\overset{1}{C}\overset{2}{\gamma}\ \ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\delta}_1=\overset{3}{C}\overset{2}{\gamma}+\overset{2}{C}\overset{3}{\gamma}\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$\delta_2=\overset{1}{C}\gamma_2+C\overset{1}{\gamma}_1\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\delta}_2=\overset{2}{C}\overset{1}{\gamma}_2+\overset{1}{C}\overset{2}{\gamma}_1\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\delta}_2-\overset{3}{C}\overset{2}{\gamma}+\overset{2}{C}\overset{3}{\gamma}_1\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$\delta_3=C\overset{1}{\gamma}_2\ \ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{1}{\delta}_3=\overset{1}{C}\overset{2}{\gamma}\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ ,,\ \ \overset{2}{\delta}_3=\overset{2}{C}\overset{3}{\gamma}_2\ .\ .\ .\ \text{'stb.}$$

$$D=(-\delta\mathrm{A}_{n-4}+\delta_1\mathrm{A}_{n-5}-\delta_2\mathrm{A}_{n-6}+\delta_3\mathrm{A}_{n-7});\ \overset{1}{D}=(-\overset{1}{\delta}\mathrm{A}_{n-5}+\overset{1}{\delta}_1\mathrm{A}_{n-6}-\overset{1}{\delta}_2\mathrm{A}_{n-7}+\overset{1}{\delta}_3\mathrm{A}_{n-8});$$

az ötödik rangban:

$$\mathrm{E}=\mathrm{D}\overset{1}{\mathit{D}}-\overset{1}{\mathrm{D}}\mathit{D};\quad \overset{1}{\mathrm{E}}=\overset{1}{\mathrm{D}}\overset{2}{\mathit{D}}-\overset{2}{\mathrm{D}}\overset{1}{\mathit{D}};\quad \overset{2}{\mathrm{E}}=\overset{2}{\mathrm{D}}\overset{3}{\mathit{D}}-\overset{3}{\mathrm{D}}\overset{2}{\mathit{D}}\ldots\text{'stb.}$$

. . . .

mint azt a' keresett mennyiségek' egymásbol származtatásának állandó törvénye szerint akarhány tagokon és rangokon keresztül könnyü tovább folytatni.

Legyen Például:

1.) $\mathrm{S}=1+x+x^2+2x^3+3x^4+4x^5+6x^6+9x^7+\ldots\ldots$ 'stb.

leszen az első rangban:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathrm{A}_n; & \mathrm{A}_{n-1}; & \mathrm{A}_{n-2}; & \mathrm{A}_{n-3}; & \mathrm{A}_{n-4}; & \mathrm{A}_{n-5}; & \mathrm{A}_{n-6}; & \mathrm{A}_{n-7} \\ 9; & 6; & 4; & 3; & 2; & 1; & 1; & 1 \end{array}$$

a' második rangban:

$$\mathrm{B}=0;\quad \overset{1}{\mathrm{B}}=2;\quad \overset{2}{\mathrm{B}}=-1;\quad \overset{3}{\mathrm{B}}=-1;\quad \overset{4}{\mathrm{B}}=1$$

$$\beta=4;\quad \overset{1}{\beta}=3;\quad \overset{2}{\beta}=2;\quad \overset{3}{\beta}=2;\quad \overset{4}{\beta}=1$$

$$\beta_1=6;\quad \overset{1}{\beta}_1=4;\quad \overset{2}{\beta}_1=3;\quad \overset{3}{\beta}_1=2;\quad \overset{4}{\beta}_1=1$$

$$\mathit{B}=2;\quad \overset{1}{\mathit{B}}=-1;\quad \overset{2}{\mathit{B}}=-1;\quad \overset{3}{\mathit{B}}=-1;\quad \ldots\ldots$$

a' harmadik rangban: *)

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{C}=-4; & \overset{1}{\mathrm{C}}=-3; & \overset{2}{\mathrm{C}}=-2 \\ \gamma=-4; & \overset{1}{\gamma}=-3; & \overset{2}{\gamma}=-2 \\ \gamma_1=0; & \overset{1}{\gamma}_1=-6; & \overset{2}{\gamma}_2=-2 \\ \gamma_2=8; & \overset{1}{\gamma}_2=-3; & \overset{2}{\gamma}_2=-2 \\ \mathit{C}=4; & \overset{1}{\mathit{C}}=3; & \overset{2}{\mathit{C}}=2 \end{array}\right\}$$

*) C-re nezve a' $\mathrm{B};\ \overset{1}{\mathrm{B}};\ \overset{2}{\mathrm{B}};\ \overset{3}{\mathrm{B}}\ldots\ldots$ 'stb. kitalált értékein csupán az első munkálat megújításával.

a' negyedik rangban:

$\mathrm{D}=0;\ \overset{1}{\mathrm{D}}=0;$ mellyből a' sorzat harmadik rangú visszafutónak elismertetvén; 's annál fogva $\mathrm{P}_4;\ \overset{1}{\mathrm{P}}_4;\ \overset{2}{\mathrm{P}}_4;$ 0-ba válván:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathit{C}}=\frac{-4}{4}=-1=a_3$$

$$\frac{B-\beta P_3+\beta_1 \overset{1}{P}_3}{B} = \frac{0-12+12}{2} = 0 = a_2$$

$$\frac{A-P_2}{-A} = \frac{9-3}{-6} = \frac{6}{-6} = -1 = a_1$$

mellyek után $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots\ldots$ 'stb. $= 0$; értékei a' fentebb adott módokon meghatároztatván, végezetre:

$$S = \frac{1}{1-x-x^3}$$

2.) $S = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x_7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} \ldots$ 'stb.

leszen az első rangban:

$$A = \overset{n}{10};\ \overset{n-1}{8};\ \overset{n-2}{7};\ \overset{n-3}{7};\ \overset{n-4}{7};\ \overset{n-5}{6};\ \overset{n-6}{4};\ \overset{n-7}{2};\ \overset{n-8}{1};\ \overset{n-9}{1};\ \overset{n-10}{1}.$$

a' második rangban:

$$\begin{array}{llllllll}
B = \overset{0}{6}; & \overset{1}{7}; & \overset{2}{0}; & \overset{3}{-7}; & \overset{4}{-8}; & \overset{5}{-4}: & \overset{6}{0}; & \overset{7}{1}; \\
\beta = 7; & 7; & 7; & 6; & 4; & 2; & 1; & 1; \\
\beta_1 = 8; & 7; & 7; & 7; & 6; & 4; & 2; & 1; \\
\mathit{B} = 7; & 0; & -7; & -8; & -4; & 0; & 1; & 0;
\end{array}$$

a' harmadik rangban:

$$\begin{array}{llllll}
C = \overset{0}{-49}; & \overset{1}{-49}; & \overset{2}{-49}; & \overset{3}{-36}; & \overset{4}{-16}; & \overset{5}{-4}; \\
\gamma = 0: & -49; & -56; & -24; & 0; & 2; \\
\gamma_1 = 49; & -49; & -98; & -60; & -8; & 4; \\
\gamma_2 = 49; & 0; & -49; & -48; & -16; & \\
\mathit{C} = 49; & 49; & 42; & 24; & 8 &
\end{array}$$

a' negyedik rangban:

$$\begin{array}{llll}
D = \overset{0}{0}; & +\overset{1}{343}; & +\overset{2}{336}; & +\overset{3}{96}; \\
\delta = 0; & -2058; & -1344; & -192; \\
\delta_1 = 0; & -4802; & -3360; & -480; \\
\delta_2 = 0; & -4802; & -3696; & -576; \\
\delta_3 = 0; & -2401; & -2016; & -384; \\
\mathit{D} = 0; & +343; & +336; & +96;
\end{array}$$

mellyből a' sorzat negyedik rangu visszafutónak elismertetvén; 's annál fogva P_5; $\overset{1}{P}_5$; $\overset{2}{P}_5$; ..... 'stb. 0-ba válván:

$$\frac{\mathrm{D}}{D} = \frac{\overset{1}{\mathrm{D}}}{\overset{1}{D}} = 1 = a_4$$

$$\frac{\mathrm{C} - \gamma \mathrm{P}_4 + \gamma_1 \overset{1}{\mathrm{P}}_4 - \gamma_2 \overset{2}{\mathrm{P}}_4}{C} = \frac{-49 - 98}{49} = -3 = a_3$$

$$\frac{\mathrm{B} - \beta \mathrm{P}_3 + \beta_1 \overset{1}{\mathrm{P}}_3}{B} = \frac{6 + 22}{7} = 4 = a_2$$

$$\frac{\mathrm{A} - \mathrm{P}_2}{-A} = \frac{10 + 14}{-8} = -3 = a_1$$

mellyekböl $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = -2$; $\alpha_2 = 2$; meghatározásával, végezetre:

$$S = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4}$$

A' sorzatok' átalános és öszvező tagairol szóllani külön szakaszra feltartván, megemlitésre méltónak itéljük, hogy a' **B a b b a g e** számító műkönye által előhozott sorzat' tagai.

1; 2; 3; 4; 5; 6; . . . . 100 000 000; 100 010 002; 100 030 003; 100 060 004; 100 100 005; 100 150 006..... 'stb.

harmadik rangu visszafutó sorzatot formálnak, mellynek visszonyléptéke $-a_1 = 3$; $-a_2 = -3$; $-a_3 = 1$; 's ezen adatokbol találtatván:

$\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = -1$; $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ . . . . . . $= \alpha_{99\,999\,999} = 0$;
$\alpha_{100\,000\,000} = 10001$; $\alpha_{100\,000\,001} = -2$; $\alpha_{100\,000\,002} = 1$;
$\alpha_{100\,000\,003} = \alpha_{100\,000\,004}$ ...... 'stb. $= 0$ volna a' megfelelő törek:

$$S = \frac{1 - x + 10001x^{100\,000\,000} - 2x^{100\,000\,001} + x^{100\,000\,002}}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

minél fogva a' hasonlatos, sőt ha valami felsőbb rangú számláló haladásba által nem menne; ennél rendetlenebbnek tetszhető sorzatoknak is, analytikai törvények és alkatok alá hajthatása az analysis erejét felmúlni nem látszik. (Edinb. Review. July 1834.)

Túlhágók. Kitevőlegesek. Számlagosok.

(*Transcendentes. Exponentiales. Logarithmicae.*)

Minden eddigi függvényekben a' változók' hatványai kerültek elő; 's azoknak egyes tagait ezen átalános forma alá vehetjük: $y=Ax^p$ mellyben A az (x)-hez tartozó ösztevőt jelenti; (x) a' változót 's végre (p) azon mennyiséget mellynek hatványára a' változó fel van emelve, 's az illyen tagokbol öszvetett függvények, mellyeknek tulajdonságait eddigiekben fejtegettük; algebraiaknak neveztetnek. Könnyen szembetünhetik azonban, hogy ollyan mennyiségek is lehetnek, mellyeknek egymástoli függését meg fordított viszonyban terjeszthetjük elő, az az: olly kitétel által, mellyben az állandó mennyiség legyen változó hatványra felemelve, vagy is legyen $y=Ap^x$'s itt ujolag azon kérdés támadhat, mi viszonyban legyenek az illy kitételekben foglalt változók egymáshoz? hogy adatván az egyik belőle a' másikat kitalálhassuk; 's a' körültök teendő vizsgálatokbol lehet-e haszonvehető következményeket várni?

Mi előtt pedig ezen kérdések bővebbi kifejtésére által mennénk, szükségesnek látszik, az elemi algebrábol a' hatványok' ismeretes viszonyait röviden emlékezetbe hozni. Tudjuk hogy:

1.) $a^b . a^c = a^{b+c}$ az az:

A' hatványok egymással szoroztatnak ha a' hatványra emelt mennyiség kitevőit öszve adjuk.

2.) Tévén (b) helyett (m)-et; (c) helyett (—m)-et leszen:

$$a^m . a^{-m} = a^0 \text{ és mivel: } a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$$

$$a^m . a^0 = a^m\text{; honnét: } a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1 \text{ és:}$$

$$a^{-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}\text{; nem különben: } a^m = \frac{a^0}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{-m}} \text{ vagy:}$$

Az egységet $a^{\pm m}$-el osztjuk ha a' kitevő jegyét ellenkezőre változtatjuk.

3.) Tévén (b) helyett (m)-et; (c) helyett (n)-et

$a^m . a^{-n} = a^{m-n}$ és mivel a' legközelebbi szám szerint:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ leszen: } a^m . a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ az az:}$$

A' hatványok egymással osztatnak, ha az osztónak kitevőjét, az osztandóébol kivonjuk.

4.) $a^m . a^m = (a^m)^2 = a^{2m}$

$a^m . a^m . a^m = (a^m)^3 = a^{3m}$

. . . .

$a^m . a^m . a^m . a^m \ldots\ldots a^m = (a^m)^n = a^{nm}$ mellynél fogva:

A' hatványok 2-dik, 3-dik.... 'stb. és átalában határozatlan felsőbb hatványokra emeltetnek, ha azoknak kitevőjét az adott számmal szorozzuk.

5.) $(a^m)^p = a^{pm}$; $\sqrt[p]{(a^m)^p} = \sqrt[p]{a^{pm}} = a^m\ a^{\frac{pm}{p}}$

és ha: $pm = n$; $\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}}$ ha pedig:

$pm = n = 1$; $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ az az:

A' hatványok' keresett gyökerét kitalálhatni, ha a' hatvány' kitevőjét a' keresett gyökér hanyadikságát jelentő számmal elosztjuk.

6.) $a^m b^m = (ab)^m$ honnét:

A' tevet (*factum*) hatványa, egyenlő a' külön szorzók ugyan azon hatványra emelt tevetével. Ugyan is:

(n)-nek határozatlan értékével tehetjük $a^n = b^m$'s igy $a = b^{\frac{m}{n}}$ mellyek

után: $$a^m b^m = b^{\frac{m}{n} . m}\ b^m = \left(b^{\frac{m}{n}+1}\right)^m = (b^{\frac{m}{n}}\ b)^m = (ab)^m$$

Ezeket előre bocsátván, ha a' nevezett kitételben $y = Ap^x$ tesszük egyszerités végett $A = 1$; 's (x)-nek 0; 1; 2.... 'stb. értéket adunk, találni fogjuk egymás után:

$$y = p^0;\ p^1;\ p^2;\ p^3;\ p^4; \ldots\ldots p^n$$

az (y) értékeit egyszerü mérleges sorzat által kifejezve, mellyben tehát a' kitevőkröl legközelebb előadott viszonyok' kivétel nélkül minden tagokra nézve állani fognak. Minekokáért ha ezentul a' p-nek meghatározott értékéből (= a) két sorzatot formálunk, mellyeknek egyike a' 0; 1; 2; 3..... 'stb. számlagos (*arithmetica*) haladás legyen, másika az (a) megfelelő hatványainak értéke, például ha volna $p = a = 10$'s a' formálandó kétféle sorzat:

számlagos haladás	mérleges haladás
0	1
. .	. .
. .	. .
. .	. .
. .	. .
1	10
. .	. .
. .	. .
. .	. .
. .	. .
2	100
. .	. .
. .	. .
. .	. .
. .	. .
3	1000
. .	. .
. .	. .
. .	. .
. .	. .
4	10000
. .	. .
. .	. .
. .	. .
. .	. .
5	100000
. .	. .
. .	. .
. .	. .
. .	. .
6	1000000
. .	. .
. .	. .

a' hatványok' kifejtett viszonyait alkalmazván, azonnal látni fogjuk, hogy ha:

a.) 10-et kellene szoroznom 1000-el. Volna $10^1 . 10^3 = 10^4$ és a' 4-nek megfelelő szám = 10000. Nem különben 100.1000 $= 10^2 . 10^3 = 10^5$'s az 5-nek megfelel 100000 'stb.

b.) 100000-et kellene osztanom 100-al. Volna $\frac{10^5}{10^2} = 10^5 . 10^{-2} = 10^3$; 's a' 3-nak megfelel 1000. Azonképen $\frac{100000}{1000} = \frac{10^5}{10^3} = 10^5 . 10^{-3} = 10^2$ és a' 2-nek megfelel 100.

c.) 10-et kellene 5-dik hatványra emelnem. Volna $(10^1)^5 = 10^5$'s az 5-nek megfelel 100000. Hasonlag ha 100-nak 2-dik hatványát keressük $(10^2)^2 = 10^4$ és a' 4-nek megfelel 10000.

d.) 100-nak négyszög gyökere kívántatnék. Volna $10^{2/2} = 10^1$ és az 1-nek megfelel 10; nem különben 1000-nek köbök gyökere $10^{3/3} = 10^1$'s az egynek megfelel 10. Viszont 1000000-nak négyszög gyökere $10^{6/2} = 10^3 = 1000$; 's ugyan 1000000-nak köböl gyökere $10^{6/3} = 10^2 = 100$ mint a' számlagos haladásnak megfelelő mérleges haladásban az illető számoknál találtatik.

Már hogy így a' nehezebb számvetési munkálatokat egyszeríteni lehetséges, magában szembetünő lévén: elsőben azon viszonyokat kell különösebb szemlélet alá vennünk, mellyek ezen kitételben $y = p^x$ a' p-nek = a meghatározott értékéhez képest a' két változók között helyet fognak találni; azután pedig olly módokrol gondoskodnunk, hogy az y minden értékeinek (mellyek az előterjesztett hiányos vázlatban, például 1 és 10; 10 és 100; .... 'stb. közt kimaradtak) meg felelő (x)-nek értékeit kiszámíthassuk. Vegyük észre pedig hogy:

a.) Az (x)-nek nevekedő értékével nevekedvén y; lehet az (x)-nek olly értéket adni, mellynél fogva a^x az y-nak valami adott állító értékével egyenlővé váljék. Ugyan is: az y-nak akarmi állító értéke, szükségképen vagy az elő ter–

jesztett mérleges haladásba foglaltatik, midőn (x)-nek értéke a' mérleges sorzat tagja hanyadikságát jelentő szám által tökéletesen kitétethető, vagy: (m)-nek határozatlan értékével a^m és a^{m+1} közé tartozik esni; melly szerint, $y > a^m$ és $y < a^{m+1}$

Mivel továbbá h-nak k-nak 0-tol fogva folytonosan nevekedhető értékével tehetjük, nem csak: $a^{m+h} > a^m$ és $a^{m+1-k} < a^{m+1}$ hanem egyszersmind $a^{m+h} = a^{m+1-k}$'s igy az y-ont nem csak hogy folyvást a^{m+h} és a^{m+1-k} közé ejthetjük, hanem egyszersmind (h)-nak (k)-nak olly értéket adhatunk, mellyel: $a^{m+h} = a^{m+1-k}$ lévén, a' kettő közti külzés teljesen elenyészik ez esetben $x = m+h = m+1-k$ értékével szükségképen kell lenni $y = a^x$. Minél fogva:

b.) Mivel ezen megmutatás minden felvehető alapszámokra egyiránt kiterjed, nem különben más alapszámokra nézve is (a) helyett b, c, d, e.... 'stb. értékeivel hasonlag x; x'; x''...nek minden esetben olly értékek tulajdonithatók mellyekkel:

$$y = a^x = b^{x'} = c^{x''} = c^{x'''} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

c.) Ha tehát ezentul az alapszámot (a)-val 's az ebből származott számlagokat (*Logarithmi*) Log-al; más alapszámot (e)-vel 's ismét az ebből származott számlagokat log-al jegyezzük: a' számlagok nem egyebek lévén mint a' felvett alapszámnak az (y) különféle értékeihez alkalmazott kitevői, a' kitevők fentebb kifejtett tulajdonságait tekintvén, a' következő viszonyok azonnal szembetünhetnek.

a.) $a^m . a^n = a^{m+n}$; $\text{Log. } a^m . a^n = \text{Log. } a^{m+n} = m+n$

's tévén $x = a^m$; $y = a^n$; $\text{Log. } x = m$; $\text{Log. } y = n$

1.) $\text{Log. } xy = \text{Log. } x + \text{Log. } y$

b.) $(a^m)^n = a^{mn}$; $\text{Log. } (a^m)^n = \text{Log. } a^{mn} = mn$

's tévén $x = a^m$; $\text{Log. } x = m$

2.) $\text{Log. } x^n = n \text{ Log. } x$

c.) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\text{Log. } \frac{a^m}{a^n} = \text{Log. } a^{m-n} = m-n$

's tévén $x = a^m$; $y = a^n$; $\text{Log. } x = m$; $\text{Log. } y = n$

3. $\text{Log. } \frac{x}{y} = \text{Log. } x - \text{Log. } y$

d.) $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$; $\text{Log. } \frac{1}{a^m} = \text{Log. } a^{-m} = -m$

's tévén $x = a^m$ mellyből $\text{Log. } x = m$

4.) $\text{Log. } \frac{1}{x} = -\text{Log. } x$

e.) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\text{Log.}\ \sqrt[n]{a^m} = \text{Log.}\ a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}$

's legyen $x = a^m$; $\text{Log.}\ x = m$

5.) $\text{Log.}\ \sqrt[n]{x} = \frac{\text{Log.}\ x}{n}$

f.) $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $\text{Log.}\ a^0 = 0$; $\text{Log.}\ a^1 = 1$

6.) $\text{Log.}\ 1 = 0$; $\text{Log.}\ a = 1$

g.) Legyen $x = a^m$ honnét $\text{Log.}\ x = m$ leszen:

7.) $a^{\text{Log.}x} = x$

h.) Legyen $m = \text{Log.}\ z^x = x\ \text{Log.}\ z$

mivel egyszersmind $m = \text{Log.}\ a^m$

8.) $\text{Log.}\ z^x = \text{Log.}\ a^{x\text{Log.}z}$ vagy: $z^x = a^{x\text{Log.}z}$

i.) Két különböző alapszámot vévén fel, tehetjük: $x = a^m = e^n$ tehát a' kétféle számlagokat Log-al és log-al jelelvén:

$\text{Log.}\ x = m$; $\text{log.}\ x = n$; honnét $\frac{\text{Log.}\ x}{\text{log.}\ x} = \frac{m}{n}$. Akarhogy nevekedjék vagy fogyjon az (x) azon nevekedés vagy fogyatkozás $x^r = y = a^{mr} = e^{nr}$-el kitétethetik; melly esetben $\frac{\text{Log}\ y}{\text{log.}\ y} = \frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}$ tehát:

9.) $\frac{\text{Log.}\ x}{\text{log.}\ x} = \frac{\text{Log.}\ y}{\text{log.}\ y} = \frac{m}{n}$

k.) Lévén $a^m = e^n$; mind két mennyiséget ugyan azon (a) alapszámu rendszerbe helyezve leszen: $m\ \text{Log.}\ a = n\ \text{Log.}\ e$; 's mivel $\text{Log.}\ a = 1$; találtatik $\frac{m}{n} = \text{Log.}\ e$; 's azonképen az (e) alapszámu rendszerben: $m\ \text{log.}\ a = n\ \text{log.}\ e$

's mivel $\text{log.}\ e = 1$; találtatik $\text{log.}\ a = \frac{n}{m}$; azért is:

10.) $\frac{\text{Log.}\ x}{\text{log.}\ x} = \frac{m}{n} = \text{Log.}\ e$; $\frac{\text{log.}\ x}{\text{Log.}x} = \frac{n}{m} = \text{log.}\ a$

l.) A' legközelebbiek szerint: $\text{Log.}\ x = \text{Log.}\ e\ \text{log.}\ x$ és $\text{log.}\ x = \text{Log.}\ x\ \text{log.}\ a$; 's tévén x helyett (a)-t vagy (e)-t mivel $\text{Log.}\ a = \text{log.}\ e = 1$

11.) $\text{Log.}\ e\ \text{log.}\ a = 1$. Mellyek után:

A' számlagok kiszámítására általmenvén, 's az alapszámot $= a$ ismeretesnek például: $= 10$ vévén fel:

I.) Elemiképen:

a.) Az 1 és 10 közt, úgy a' 10 és 100 közt.... 'stb. eső számok' Logarithmusai az 1 és 10 vagy a' 10 és 100 Logarithmusai közé fognak esni. Tehát ha különösen valamelly 1 és 10 között eső szám' Logarithmusa kivántatnék:

b.) Huzattassék ki 1×10-nek négyszög gyökere találtatik $10^{1/2} =$ 3,162277601 mellynek tehát Logarithmusa $= \frac{1}{2} = 0,500000$... Mint a' Logarithmai táblákban valósággal tatáltatik. Log. 3,162277 = 0,4999999

c.) Ahoz képest mint azon egyes szám, mellynek Logarithmusa kerestetik, kisebb vagy nagyobb 3,162277601-nél, és igy e' közt és 1; vagy 10; közt esik; huzattassék ismét négyszög gyökér az $1 \times 3,162277601$ böl v. $10 \times 3,16227601$ böl az elsőnek megfelelő Logarithmus $= \frac{1}{4} = 0,25000$ a' másiknak $\frac{3}{4} = 0,750000$

d.) Ezen bánás mód mindig a' keresett számhoz közelítéssel addig folytattassék, valamig annak a' kitalált számtol külzése figyelem nélkül hagyható, 's végtére az alapszám' megfelelő hatványát a' keresett Logarithmusnak tekinthetni. Igy például: az 5-höz 22-szeri közelítéssel találtatik Log. 5,0000008 = 0,6989700 és a' 9-hez 26-szorival Log. 8,9999998 = 0,9542425 mellyeket tehát mivel a' keresettektől csak tiz milliomosokban külzenek, mint az 5-nek és 9-nek Logarithmusait használhatni.

5.) A' tős számok' (*numeri primi*) Logarithmusai feltaláltatván, a' tevetek', hanyadosok' 's hatványok' Logarithmusai, csupa öszveadás, kivonás és sokszorozás által az előbbi 1.) 2.) 3.) számok szerint könnyü móddal kitaláltathatók. (l. Vega Vorlesungen 'stb. Wolf Elementa Arithm.)

2.) Bürja szerint:

a.) Az alapszám' felsőbb hatványait, 's annak 0,1; 0,2; 0,3...0,9 nem különben 0,01; 0,02...... 0,09 úgy 0,001; 0,002.... 0,009 'stb. gyökereit kellene kiszámítani; melly meg lévén:

b.) Mivel p, q, r, s, t...nek 1-töl 9-ig felvételhető értékeivel az adott számot R-el jegyezvén:

c.) $R = a^m . a^{0,p} . a^{0,0q} a^{0,00r} . a^{0,000s} a^{0,0000t}$...... 'stb.

d.) Az (a)-nak R-hez legközelebbi kisebb hatványából (m) ismeretessé lévén, tétessék a' valóságos osztás végrehajtása után $\frac{R}{a^m} = R'$ leszen:

e.) $R' = a^{0,p}.\ a^{0,0q}.\ a^{0,00r}.\ a^{0,000s}.\ a^{0,0000t} \ldots\ldots$ 'stb. 's igy tovább;

$R'' = a^{0,0q}.\ a^{0,00r}.\ a^{0,000s}.\ a^{0,000t} \ldots\ldots\ldots$ 'stb.

$R''' = a^{0,00r}.\ a^{0,000s}.\ a^{0,0000t} \ldots\ldots\ldots\ldots$ 'stb.

. . . .

melly munkálatokat a' megkivántató tizedes helyig folytathatni.

Például: $a = 10$-nek felsőbb hatványai volnának:

$a^1 = 10$; $a^2 = 100$; $a^3 = 1000$; $a^4 = 10000 \ldots\ldots$ 'stb.

a' kikuzandó gyökerek pedig:

$10^{0,1} = 1,2589\ldots$; $10^{0,2} = 1,5848\ldots$; $10^{0,3} = 1,9952\ldots$

$10^{0,4} = 2,5118\ldots$; $10^{0,5} = 3,1622\ldots$; $10^{0,6} = 3,9810\ldots$

$10^{0,7} = 5,0118\ldots$; $10^{0,8} = 6,3095\ldots$; $10^{0,9} = 7,9432\ldots$

továbbá:

$10^{0,01} = 1,0232\ldots$; $10^{0,02} = 1,0471\ldots$; $10^{0,03} = 1,0715\ldots$

$10^{0,04} = 1,0964\ldots$; $10^{0,05} = 1,1220\ldots$; $10^{0,06} = 1,1481\ldots$

$10^{0,07} = 1,1748\ldots$; $10^{0,08} = 1,2022\ldots$; $10^{0,09} = 1,2302\ldots$

és:

$10^{0,001} = 1,0023\ldots$; $10^{0,002} = 1,0046\ldots$; $10^{0,003} = 1,0069\ldots$

$10^{0,004} = 1.0092\ldots$; $10^{0,005} = 1,0115\ldots$; $10^{0,006} = 1,0139\ldots$

$10^{0,007} = 1,0162\ldots$; $10^{0,008} = 1,0185\ldots$; $10^{0,009} = 1,0209\ldots$

. . . .

Mellyek után ha Log. 125 kerestetnék, tegyük

$R = 125 = 10^m\ 10^{0,p}.\ 10^{0,0q}.\ 10^{0,00r}.\ 10^{0,000s} \ldots\ldots$ 'stb.

találtatik (10)-nek legközelebbi kisebb hatványa' $= 100$ öszvehasonlitásából

$m = 2$ tehát:

$$R' = \frac{125}{100} = 1,25 = 10^{0,p}.\ 10^{0,0q}.\ 10^{0,00r}.\ 10^{0,000s} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

honnét $10^{0,p}$-nek legközelebbi kisebb hatványa' öszvehasonlitásából

$p = 0$ tehát ismét:

$R'' = 1,25 = 10^{0,0q}.\ 10^{0,00r}.\ 10^{0,000s} \ldots\ldots$ 'stb. honnét mivel:

$10^{0,09} = 1,2302$ lévén $q = 9$ és

$$R''' = \frac{1,25}{1,2302} = 1,0160 = 10^{0,00r}.\ 10^{0,000s}.\ 10^{0,000t} \ldots\ldots \text{'stb.}$$ mellyből

ujra a' legközelebbi kisebbik hatvány találtatván $10^{0,006} = 1,0319$; p, q, r kitalált értékeivel $125 = 10^2\ 10^{0,0}\ 10^{0,09}\ 10^{0,006} \ldots$ és igy a' 3-dik tizedjegyig számitván:

$$\text{Log. } 125 = 2 + 0,0 + 0,09 + 0,006 = 2,096 \ldots\ldots$$

Mivel azonban az első módot, az ismételt szorozások és gyökér hibuzások fáradságos véghez vitele nehezíti; utóbbi szerint pedig, egy adott számnak Logarithmusa kikeresésihez is, ha azt több tized helyig akarjuk kiszámítani, mind azon előmunkálatok megkivántatnak, mellyeket egy felvett terjedelmü egész rendszernek kidolgozására kellene forditanunk; 's e' czélra a' sorzatok' alkalmazása könnyebb 's biztosabb eszközöket szolgáltat: egyenesebb 's egyszerübb módnak látszik:

3.) A' következendő:

a.) Legyen $a^x = a^m\, a^{\frac{1}{p}}\, a^{\frac{1}{q}}\, a^{\frac{1}{r}} \ldots\ldots\ldots a^{\frac{1}{n}} = z$; az az:

$$x = m + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \ldots \frac{1}{n} = \text{Log. } z \text{ leszen:}$$

b.) $a^{\frac{1}{p}} . a^{\frac{1}{q}} . a^{\frac{1}{r}} \ldots a^{\frac{1}{n}} = \frac{z}{a^m}$'s tegyük: $\frac{z}{a^m} = z_1$ tehát:

$$a^{\frac{1}{p}} . a^{\frac{1}{q}} . a^{\frac{1}{r}} \ldots\ldots a^{\frac{1}{n}} = z_1$$

$$a.\ a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p}{r}} \ldots\ldots a^{\frac{p}{n}} = (z_1)^p$$

$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p}{r}} \ldots\ldots a^{\frac{p}{n}} = \frac{(z_1)^p}{a} \text{ 's tegyük } \frac{(z_1)^p}{a} = z_2$$

mellyből a' q-nak közelített meghatározására az utóbbi tagokat elhagyván:

α.) $a^{\frac{p}{q}} = z_2$; $a = (z_2)^{\frac{q}{p}}$

és ha z_2 az (a)-nál nagyobb legközelebbi hatványra emeltetik melly legyen $= m$; kell lenni $\frac{q}{p} < m$; $q < mp$. Minél fogva q-nak mp értéke ismeretessé lévén:

β.) $a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p}{r}} \ldots\ldots a^{\frac{p}{n}} = z_2$

$$a . a^{\frac{q}{r}} \ldots\ldots a^{\frac{q}{n}} = (z_2)^{\frac{q}{p}}$$

$$a^{\frac{q}{r}} \ldots\ldots a^{\frac{q}{n}} = \frac{(z_2)^{\frac{q}{p}}}{a} \text{ 's tegyük: } \frac{(z_2)^{\frac{q}{p}}}{a} = z_3$$

leszen ismét az (r)-nek meghatározására a' következőket elhagyván:

γ.) $a^{\frac{q}{r}} = z_3$; $a = (z_3)^{\frac{r}{q}}$

és ha z_3 az (a)-nál nagyobb legközelebbi hatványra emeltetik, melly legyen $= m'$ kell lenni $\frac{r}{q} < m'$; $r < qm'$. Minél fogva (r)-nek qm' értéke ismeretessé lévén, a' továbbiakra nézve:

δ.) $a^{\frac{1}{r}} . a^{\frac{1}{n}} = z_3$-bol hasonlag ugyan azon lehozatok következnek, 's a' közelítést mindig egyenlő munkálatok' ismétlésével határozatlanul tovább folytathatni. Meg jegyezvén:

c.) Hogy a' felemeléseket megállapított számu jegyekkel folytatván, azokat öszvevont szorozással (*multiplicatio contracta*) eszközölhetjük, 's a' közelítés annál tökéletesebb leend, minél több jegyekkel munkálunk, kevesebb számu jegyekkel ellenben a' munkálat ugyan rövidebb, de viszont ahoz képest a' közelítés is bizonytalanabb.

Példa: Kerestessék Log. 5 a' rendszer alapszámához $a = 10$; melly közben munkálat alá folyvást a' 10 első tizedes jegyek vétessenek.

Mivel: $(5)^{16} = 152587890625$; tétetvén:

$$10^{11} . 10^{\frac{1}{n}} = 152587890625 \text{ az az: } 10^{\frac{1}{n}} = 1,52587890625$$

's ha a' 10 első tizedes jegynél tovább nem megyünk: $1,5258789062 = z$ leszen:

$(z)^2 = 2,32830\,64363 \ldots$ $(z)^4 = 5,42101\,08613 \ldots$ $(z)^6 = 12,62177\,44796 \ldots$;

$$\text{mellyből } p < 6;\ a^{\frac{1}{6}} < z;\ \frac{1}{6} < \text{Log. } z$$

's a' továbbiakra nézve: $z_1 = 1,26217\,74479 \ldots$.

$(z_1)^2 = 1,59309\,19099 \ldots$ $(z_1)^4 = 2,53794\,18333 \ldots$ $(z_1)^8 = 6,44114\,87492 \ldots$
$(z_1)^{10} = 10,26134\,19628$

$$\text{mellyből: } \frac{q}{6} < 10;\ q < 60;\ \frac{1}{6} + \frac{1}{60} < \text{Log. } z$$

's a' továbbiakra nézve: $z_2 = 1,02613\,41962$

$(z_2)^2 = 1,05295\,13886 \ldots$ $(z_2)^4 = 1,10870\,66267 \ldots$ $(z_2)^8 = 1,22923\,03840$
$(z_2)^{16} = 1,51100\,73369 \ldots$ $(z_2)^{32} = 2,28314\,31721 \ldots$ $(z_2)^{64} = 5,21274\,27443$
$(z_2)^{80} = 7,87649\,25320 \ldots$ $(z_2)^{88} = 9,68202\,39396 \ldots$ $(z_2)^{90} = 10,19470\,05516$

$$\text{mellyből } \frac{r}{60} < 90;\ r < 5400;\ \frac{1}{6} + \frac{1}{60} + \frac{1}{5400} < \text{Log. } z$$

's a' továbbiakra nézve: $z_3 = 1,01947\,00551$

$(z_3)^2 = 1,03931\,91932\ldots\; (z_3)^4 = 1,08018\,43853\ldots\; (z_3)^8 = 1,16679\,83062\ldots$

$(z_3)^{16} = 1,36141\,82873\ldots\; (z_3)^{32} = 1,85345\,97529\ldots\; (z_3)^{64} = 3,43531\,30556\ldots$

$(z_3)^{96} = 6,36721\,44871\ldots\; (z_3)^{112} = 8,66844\,22418\ldots\; (z_3)^{120} = 10,11432\,37251$

$$\text{mellyből } \frac{5}{5400} < 120;\ s < 648000$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{60} + \frac{1}{5400} + \frac{1}{648000} < \text{Log. } z$$

's a' továbbiakra nézve: $z_4 = 1,01143\,23725\ldots$

$(z_4)^2 = 1,02299\,54441\ldots\; (z_4)^4 = 1,04651\,96786\ldots\; (z_4)^8 = 1,09520\,34376$

$(z_4)^{16} = 1,19947\,05697\ldots\; (z_4)^{32} = 1,43872\,96475\ldots\; (z_4)^{64} = 2,06994\,29985$

$(z_4)^{128} = 4,28466\,40170\ldots\; (z_4)^{192} = 8,86901\,02829\ldots\; (z_4)^{200} = 9,71337\,05499$

$(z_4)^{202} = 9,93673\,38194\ldots\; (z_4)^{203} = 10,05033\,42618\ldots$

$$\text{mellyből } \frac{t}{648000} < 203;\ t < 131544000 \text{ honnét:}$$

$$\text{Log. } (5)^{16} > 11 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6.10} + \frac{1}{6.10.90} + \frac{1}{6.10.90.120} + \frac{1}{6.10.90.120.203}$$

$$\text{Log. } (5)^{16} > 11 + \frac{10.90.120.203 + 90.120.203 + 120.203 + 203 + 1}{6.10.90.120.203} \text{ az az:}$$

$$\text{Log. } (5)^{16} > \frac{1471124964}{131544000} \text{ 's végezetre:}$$

$$\text{Log. } 5 > \frac{14711\,24964}{16.131544000} = \frac{367781241}{526176000} = 0,69897\,00043\,33150\ldots$$

találtatik pedig tökéletesebben számítva:

$$\text{Log. } 5 = 0,69897\,00043\,36019\ldots > 0,69897\,00043\,33150\ldots$$

különbség a' kettő között: 0,00000 00000 02869

II. Sorzatokkal:

A.) Természetes számlagok.

Ha a' számlagos függvények is, mint minden egyéb eddigiek, valami változó' emelkedő hatványai mentében elrendelt sorzatokra kifejtethetnek; nevezvén akarmi felvétethető alapszámot (a)-nak kell lenni:

1.) $a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 \ldots$ 'stb.

ezenkivül: mivel a' kifejtendő sorzat a' (209 lap) elő adott átalános törvényeknek is eleget tartozik tenni, mellyek szerint:

$$a^x . a^n = a^{x+n};\quad a^x . a^x = a^{2x};$$

ezek közül mint egyszerűbbet az utóbbit választván, mivel:

$$a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 \ldots\ldots$$

ebben (x) helyett 2x-nek helyretételével:

$$a^{2x} = A_0 + 2A_1x + 4A_2x^2 + 8A_3x^3 + 16A_4x^4 + 32A_5x^5 \ldots\ldots$$

's a' szorozást az egyenlet' másik felén valósággal végrehajtván:

$$a^x.a^x = A_0A_0 + \left.\begin{matrix}A_0A_1\\ +A_0A_1\end{matrix}\right\}x + \left.\begin{matrix}A_0A_2\\ +A_1A_1\\ +A_2A_0\end{matrix}\right\}x^2 + \left.\begin{matrix}A_0A_3\\ +A_1A_2\\ +A_1A_2\\ +A_0A_3\end{matrix}\right\}x^3 + \left.\begin{matrix}A_0A_4\\ +A_1A_3\\ +A_2A_2\\ +A_3A_1\\ +A_4A_0\end{matrix}\right\}x^4 + \left.\begin{matrix}A_0A_5\\ +A_1A_4\\ +A_2A_3\\ +A_3A_2\\ +A_4A_1\\ +A_0A_5\end{matrix}\right\}x^5 \ldots\ldots$$

annak utánna:

az (x) ugyan azon hatványainak ösztevőit egymáshoz egyenlítvén:

$$A_0A_0 = 1;\ 2A_1 = 2A_1;\ 2A_0A_2 + A_1A_1 = 4A_2;\ 2A_0A_3 + 2A_1A_2 = 8A_3;$$

$$2A_0A_4 + 2A_1A_3 + A_2A_2 = 16A_4;\ 2A_0A_5 + 2A_1A_4 + 2A_2A_3 = 32A_5 \ldots \text{'stb.}$$

mellyekből könnyen lehozatik:

$$A_0 = 1;\ A_1 = A_1;\ A_2 = \frac{A_1^2}{2};\ A_3 = \frac{A_1^3}{1.2.3};\ A_4 = \frac{A_1^4}{1.2.3.4};\ A_5 = \frac{A_1^5}{1.2.3.4.5} \ldots \text{'stb.}$$

annál fogva ezen kitételt a^x az (x)-nek emelkedő hatványai mentében elrendelt következő formájú sorzatra ki lehet fejteni:

$$\text{a.)}\quad a^x = 1 + A_1x + \frac{A_1^2}{1.2}x^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3}x^3 + \frac{A_1^4}{1.2.3.4}x^4 + \frac{A_1^5}{1.2.3.4.5} \ldots\ldots$$

e' kitételben (x) változó lévén, mellynek tehát akarmi értéket adhatunk tegyük

$x = 1$ leszen:

$$\text{b.)}\quad a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{1.2} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + \frac{A_1^4}{1.2.3.4} + \frac{A_1^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \text{'stb.}$$

's ezentúl két határozatlan mennyiség a és A_1 marad egyenletünkben, mellyek egymásnak kölcsönösen függvényei, 's igy egyik a' másiknak felvétele által adatván, azon kell lennünk: hogy a' nevezett határozatlan mennyiségek viszonyait, 's azokbol a' számlagok tulajdonságait, különösebben pedig azoknak kiszámítása módját felkeressük. E' végre elsőben az A_1-nek értékét szabadon megállapítván, tétessék a' szembeötlő legegyszerűbb felvétellel $A_1 = 1$; 's e' felvételhez képest, (a)-nak meghatározandó értéke legyen $= (e)$; találtatik:

$$\text{c.)}\quad e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$= 2{,}71828\ 18284\ 59045 \ldots\ldots$$

d.) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$ 'stb.

2.) Vissza menvén továbbá ismét az első egyenletre:

a.) $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{1.2.} x^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3.} x^3 + \frac{A_1^4}{1.2.3.4.} x^4 + \frac{A_1^5}{1.2.3.4.5.} x^5 \ldots$ 'stb.

mivel (x) változó; akarmi érték adassék A_1-nek, tehetjük egyszersmind $x = \frac{1}{A_1}$;

's találni fogjuk:

b.) $a^{\frac{1}{A_1}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.} + \frac{1}{1.2.3.4.} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots$ 'stb.

's az 1.) c.) alatti egyenlettel öszvehasonlítván:

c.) $\begin{cases} a^{\frac{1}{A_1}} = e; \ \frac{1}{A_1} \text{Log. } a = \text{Log. } e; \ A_1 = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e} \text{ és:} \\ a = e^{A_1}; \ \frac{1}{a} = \frac{1}{e^{A_1}} = e^{-A_1} \end{cases}$

melly kitételeket mind Log. a mind Log. e-re nézve, ugyan azon rendszerben kell érteni, maga a' rendszer mind eddig határozatlan maradván. De ha már most folytatólag, továbbra is a' természeti rendszerre szorítkozunk, mellynek alapszámja (e) tehát Lognat (e) $= 1$; következtetjük:

d.) $A_1 =$ Lognat. a

3.) Ezekután nem marad egyéb hátra mint az, hogy a' fő egyenletben:

$a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{1.2.} x^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3.} x^3 + \frac{A_1^4}{1.2.3.4.} x^4 + \frac{A_{15}}{1.2.3.4.5.} x^5 \ldots$ 'stb.

valamint fentebb 1.) szám alatt az A_1-nek felvett értékéből az (a)-t; úgy viszont megforditva is az (a)-nak akarmi adott értékéhez képest az A_1-et meg tudjuk határozni, mert az egyszersmind az adott (a)-nak természetes számlaga leszen, 's a' mint az (a)-t 1; 2; 3; 4-nek... 'stb. tesszük, 's A_1-et ahoz képest kiszámítjuk, ugyan azon kiszámítások lesznek egyszersmind az 1; 2; 3; 4-nek 'stb. természetes számlagai. Láttuk azonban (l. 210. 6 sz.) hogy az 1-nek számlaga mindenkor $= 0$; annál fogva csak az egységtől különböző számokkal kelletvén foglalatoskodnunk, tegyük $a = 1 + k$; honnét $k = a - 1$;

leszen a' kétszaki oktatmány (*theorema binomiale*) szerint kifejtve:

a.) $(1+k)^x = 1 + \frac{x}{1} k + \frac{x.\,x-1.}{1.2.} k^2 + \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3.} k^3 + \frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4.} k^4$

mellyben az x első második... 'stb. hatványainak ösztevőit egybeszedvén:

$$\text{b.)}\quad (1+k)^x = 1 + \left\{ k \quad \frac{-k^2}{2} + \frac{k^3}{3} \quad \frac{-k^4}{4} + \frac{k^5}{5} \ldots\ldots \right\} x$$

$$+ \left\{ k^2 \quad \frac{-3k^3}{3} + \frac{11k^4}{3.4} \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} x^2$$

. . . .

az 1.) sz. a.) alatti egyenlet ösztevőinek öszvehasonlításából következik:

$$\text{c.)}\quad A_1 = \left\{ k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} \quad \frac{-k^4}{4} + \frac{k^5}{5} \ldots\ldots\ldots \right\}$$

vagy is k-nak értékét (a—1)-et helyettezvén:

$$\text{d.)}\quad \begin{cases} A_1 = a-1 \quad \dfrac{-(a-1)^2}{2} + \dfrac{(a-1)^3}{3} \quad \dfrac{-(a-1)^4}{4} + \dfrac{(a-1)^5}{5} \ldots\ldots\text{'stb.} = \\ \text{Lognat. } a = a - 1 \quad \dfrac{-(a-1)^2}{2} + \dfrac{(a-1)^3}{3} \quad \dfrac{-(a-1)^4}{4} + \dfrac{(a-1)^5}{5} \ldots\text{'stb.} \end{cases}$$

B.) Szerítő vagy Móditó (*modulus*).

idomított, közszerü számlagok (*Logarithmi artificiales*, *vulgares*)

Mind eddig a' természetes számlagokat vévén tekintet alá, egyedül oda intéztük lehozatinkat: miképen lehessen valami adott számnak természetes számlagát feltalálni; melly kérdés' megoldásának elvei már most kifejtve lévén, hogy a' továbbiakban minden lehető számlagi rendszerek iránti vizsgálatokat együve foglaljunk, átalánosabb szemléletekre kell általmennünk, 's mi előtt ezt tennők előre bocsátjuk, hogy: megkülönböztetés kedviért ezentul a' természetes számlagokat (*logarithmi naturales* mellyeknek alapjok $e = 2{,}71828\ldots$) log-al; a' közszerü számlagokat (Logarithmi vulgares) mellyek a' hányítások' (calculus) könyitésére közhasználatban vagynak, 's mellyeknek alapjok $a = 10$; mint nagyobb alapszámuakat Log.-al; átalánosan pedig akarmi rendszerbe tartozó számlagokat $\lambda o \gamma$-al 's azonképen, ezen átalános rendszernek előfordulandó 's egymástol megkülönböztetendő mennyiségeit görög betűkkel fogjuk jelölni. 'S mostan térjünk vissza még egyszer a' 2.) sz. c.) alatt kifejtett viszonyokra mellyeknek következtében találtuk:

$A_1 = \dfrac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e}$; 's legközelebbi megkülönböztetés szerint a' már meghatározott e; a; alapszámokon kivül akarmi felvétethető alapszámot α-val jelelvén:

átalánosan:
$$\begin{cases} \alpha^{\frac{1}{A_1}} = e;\ \frac{1}{A_1}\,\lambda o\gamma.\alpha = \lambda o\gamma.e;\ A_1 = \frac{\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e} \\ \alpha = e^{A_1};\ \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e^{A_1}} = e^{-A_1}; \end{cases}$$

a' természetes rendszerben:
$$\begin{cases} e^{\frac{1}{A_1'}} = e;\ \frac{1}{A_1'}\,\log.e = \log.e;\ A_1' = \frac{\log.e}{\log.e} = 1 \\ e = e;\ \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1} \end{cases}$$

a' közszerü rendszerben:
$$\begin{cases} a^{\frac{1}{A_1''}} = e;\ \frac{1}{A_1''}\,\mathrm{Log}.a = \mathrm{Log}.e;\ A_1'' = \frac{\mathrm{Log}.a}{\mathrm{Log}.e} \\ a = e^{A_1''};\ \frac{1}{a} = \frac{1}{e^{A_1''}} = e^{-A_1''} \end{cases}$$

honnét A_1-nek α-hoz öszvetartozó értékével:

$$\lambda o\gamma.\alpha = \lambda o\gamma.e \left\{\alpha - 1 \quad \frac{-(\alpha-1)^2}{2} + \frac{(\alpha-1)^3}{3} \quad \frac{-(\alpha-1)^4}{4} \ldots\ldots\ldots \right\}$$

's (α) ért (x)-et helyettezvén:

$$\lambda o\gamma.x = \lambda o\gamma.e \left\{x - 1 \quad \frac{-(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \quad \frac{-(x-1)^4}{4} + \ldots\ldots \right\}$$

$$\lambda o\gamma.x = \lambda o\gamma.e\ \log.x$$

honnét következik, hogy a' természetes számlagoknak, még valami közelebb meghatározandó mennyiséggel $\lambda o\gamma.e$ szükség szoroztatniok, hogy belőlök más rend szerbe tartozó számlagok váljanak, 's ezen mennyiség módítónak vagy szeritőnek (*modulus*) neveztetik. Egyébiránt valamelly megállapított rendszerben minden számokra nézve ugyan az marad (210 l. 10. sz.) mellyet tehát átalánosa μ-el különösebben pedig a' természetes számlagokra nézve (m)-el a' közszerűekre nézve M-el jegyezvén a' következő viszonyok azonnal szembe tünhetnek:

$$\mu = \lambda o\gamma.e = \frac{\lambda o\gamma.x}{\left\{x - 1 \quad \frac{-(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \quad \frac{-(x-1)^4}{4}\right.} = \frac{\lambda o\gamma.x}{\log.x}$$

$$m = \log.e = \frac{\log.x}{\left\{1 - x \quad \frac{-(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \quad \frac{-(x-1)^4}{4}\right.} = \frac{\log.x}{\log.x}$$

$$M = \text{Log. } e = \frac{\text{Log. } x}{\left\{x-1 \quad \frac{-(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \quad \frac{-(x-1)^4}{4} \ldots\ldots\right\}} = \frac{\text{Log. } x}{\text{log. } x}$$

Tehát a' (210 lap. 9 sz. értelmében x-ért a' rendszernek megfelelő alapszámot helyettezvén, minthogy e' miatt a' kitételek' értéke változást nem szenved, az alapnak számlaga pedig minden rendszerben = 1

$$\mu = \lambda o\gamma. e = \frac{1}{\left\{\alpha-1 \quad \frac{-(\alpha-1)^2}{2} + \frac{(\alpha-1)^3}{3} - \frac{(\alpha-1)^4}{4}\ldots\right\}} = \frac{1}{A_1} = \frac{1}{\text{log. } x}$$

$$m = \text{log. } e = \frac{1}{\left\{e-1 \quad \frac{-(e-1)^2}{2} + \frac{(e-1)^3}{3} \quad \frac{-(e-1)^4}{4}\right\}} = \frac{1}{A_1'} = \frac{1}{\text{log. } e} = 1$$

$$M = \text{Log. } e = \frac{1}{\left\{10-1 \quad \frac{-(10-1)^2}{2} + \frac{(10-1)^3}{3} \quad \frac{-(10-1)^4}{4}\right\}} = \frac{1}{A_1''} = \frac{1}{\text{log. } 10}$$

Végezetre az eddigi szemléletek' keletkezményeit (*resultatum*) öszveállítván, (A_1)-nek; (a)-nak; és (x)-nek; határozatlan értékével:

$$1.)\ a^x = 1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_1^2}{1.2.}x^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3}x^3 + \frac{A_1^4}{1.2.3.4}\ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$2.)\ a^x = 1 + \frac{\lambda o\gamma. a}{\lambda o\gamma. e}\cdot\frac{x}{1} + \left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\lambda o\gamma. e}\right)^2\cdot\frac{x^2}{1.2.} + \left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\lambda o\gamma. e}\right)^3\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$3.)\ a^x = 1 + \frac{\lambda o\gamma. a}{\mu}\cdot\frac{x}{1} + \left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\mu}\right)^2\cdot\frac{x^2}{1.2.} + \left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\mu}\right)^3\cdot\frac{x^3}{1.2.3.} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$4.)\ a^x = 1 + (\text{log. } a)\frac{x}{1} + \frac{(\text{log. } a)^2. x^2}{1.\ 2.} + \frac{(\text{log. } a)^3 x^3}{1.2.3.} + \frac{(\text{log. } a)^4 x^4}{1.2.3.4.} + \ldots \text{'stb.}$$

$$5.)\ e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

mellyekből tétetvén $x = 1$

$$6.)\ a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{1.2.} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + \frac{A_1^4}{1.2.3.4} + \frac{A_1^5}{1.2.3.4.5.} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$7.)\ a = 1 + \left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\lambda o\gamma. e}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\lambda o\gamma. e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\lambda o\gamma. a}{\lambda o\gamma. e}\right)^3 + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$8.)\ a = 1 + \left(\frac{\lambda o\gamma.\, a}{\mu}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\lambda o\gamma.\, a}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\lambda o\gamma.\, a}{\mu}\right)^3 + \ldots\ \text{'stb.}$$

$$9.)\ a = 1 + \log.\, a + \frac{(\log.\, a)^2}{1.2} + \frac{(\log.\, a)^3}{1.2.3} + \frac{(\log.\, a)^4}{1.2.3.4} + \ldots\ \text{'stb.}$$

$$10.)\ e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}\ \ldots\ \text{'stb.}$$

$e = 2{,}71828\ \ 18284\ \ 59045 \ldots$ 'stb.

's tévén α^x; a^x; $e^x = z$; melly esetben illetőleg:

$x = \lambda o\gamma.\, z; = \text{Log.}\, z. = \log.\, z$; és: $\lambda o\gamma.\, \alpha = \text{Log.}\, a = \log.\, e = 1$

$$11.)\ z = 1 + \frac{A_1}{1}\lambda o\gamma.\, z + \frac{A_1^2}{1.2}(\lambda o\gamma.\, z)^2 + \frac{A_1^3}{1.2.3}(\lambda o\gamma.\, z)^3 + \frac{A_1^4}{1.2.3.4}(\lambda o\gamma.\, z)^4 + .$$

$$12.)\ z = 1 + \frac{1}{\lambda o\gamma.\, e}\lambda o\gamma.\, z + \left(\frac{1}{\lambda o\gamma.\, e}\right)^2\frac{(\lambda o\gamma.\, z)^2}{1.2} + \left(\frac{1}{\lambda o\gamma.\, e}\right)^3\frac{(\lambda o\gamma.\, z)^3}{1.2.3} + \ldots\ \text{'stb.}$$

$$13.)\ z = 1 + \frac{\lambda o\gamma.\, z}{\mu} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\lambda o\gamma.\, z}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\lambda o\gamma.\, z}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\lambda o\gamma.\, z}{\mu}\right)^4 +$$

$$14.)\ z = 1 + \frac{\text{Log.}\, z}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\text{Log.}\, z}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\text{Log.}\, z}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\text{Log.}\, z}{M}\right)^4 +$$

$$15.)\ z = 1 + \log.\, z + \frac{(\log.\, z)^2}{1.2} + \frac{(\log.\, z)^3}{1.2.3.} + \frac{(\log.\, z.)^4}{1.2.3.4} + \ldots\ \text{'stb.}$$

$$16.)\ \lambda o\gamma.\, x = \lambda o\gamma.\, e\left\{x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots\text{'stb.}\right\} = \lambda o\gamma.\text{e.}\log.x$$

$$17.)\ \lambda o\gamma.\, x = \mu\left\{x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots\text{'stb.}\right\} = \mu.\, \log.\, x$$

$$18.)\ \text{Log.}\, x = M\left\{x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots\text{'stb.}\right\} = M \log.\, x$$

III. Átváltoztatások öszvehajló sorzatokká.

Eljöttünk odáig, hogy a' természetes számlagokat mellyeknek kitételét találtuk:

$$\alpha.)\ \log.\, x = \left\{x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}\ \ldots\ \text{'stb.}\right\}$$

valami mennyiséggel μ kell szoroznunk, mi szerint más rendszerbe tartozó számlagokká váljanak. 'S ezen módítónak nevezett mennyiség' átalános kitétele volt; α-val akarmi felvétethető alapszámot jegyezvén.

$$\beta.)\ \mu = \frac{1}{\left\{\alpha - 1 - \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{(\alpha-1)^3}{3} - \frac{(\alpha-1)^9}{4} + \dots \text{'stb.}\right\}}$$

Mivel mindazáltal a' rekesz alá foglalt sorzatoknak csak úgy vehetjük hasznát, ha öszvehajlanak; mellyre nézve pedig a' 107 l. 3. sz. értelmében kellene lenni $x - 1 < 1$'s azonképen $\alpha - 1 < 1$; azonban ezen feltétel (x)-nek 's (α)-nak akarmi felvétethető értékére nézve éppen nem talál helyet, sőt azon esetben is midőn $x - 1 < 1$; vagy $\alpha - 1 < 1$; a' sorzatok' annál hirtelenebbi öszvehajlásának eszközléséül minél kisebb érték kivántatik, a' mondottak' elérésére következő átváltoztatásokkal élhetünk:

1.) Az (x)-nek határozatlan gyökerét kivonván 's helyettezvén:

$$\log. \sqrt[m]{x} = \left\{(\sqrt[m]{x} - 1 - \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^4}{3} \dots\dots \text{'stb.}\right\}$$

és átalánosan:

$$\lambda o\gamma.\ \sqrt[m]{x} = \lambda o\gamma.\ e\left\{(\sqrt[m]{x} - 1) - \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^3}{3} - \frac{\sqrt[m]{x}-1)^4}{4} \dots \text{'stb.}\right.$$

honnét mivel $\lambda o\gamma.\ x = m\ \lambda o\gamma.\ \sqrt[m]{x}$

$$\text{a.)}\ \lambda o\gamma.\ x = m\ \lambda o\gamma.\ e\left\{(\sqrt[m]{x} - 1) - \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{x}-1)^4}{4} \dots \text{'stb.}\right.$$

(m)-nek tagadó értékével pedig minthogy:

$$(\sqrt[-m]{x} - 1) = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{x}} - 1\right) = -\left(1 \quad \frac{-1}{\sqrt[m]{x}}\right) \text{ezenkivül: } \lambda o\gamma.\ x = -m\ \lambda o\gamma.\ \sqrt[-m]{x}$$

megemlítvén hogy mivel mind az állító mind a' tagadó mennyiségek' páros hatványai egyiránt állítók, annál fogva páros hatványoknál az előjegyeket ellenkezőkre kell változtatnunk:

$$\text{b.)}\ \lambda o\gamma.\ x = m.\ \lambda o\gamma.\ e\left\{\left(1 \quad \frac{-1}{\sqrt[m]{x}}\right) + \frac{1}{2}\left(1 \quad \frac{-1}{\sqrt[m]{x}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 \quad \frac{-1}{\sqrt[m]{x}}\right)^3 + \dots \text{'stb.}\right\}$$

melly közben ha $x > 1$ egyszersmind: $\sqrt[m]{x} > 1$ és $\frac{1}{\sqrt[m]{x}} < 1$

E' két sorzatok nevezetesek mivel a' számlagok' határait terjesztik elő. Ugyan is: Az a.) alatti sorzatban; minthogy az elsőre következő két két tagoknak öszvete, a' sorzat öszvehajlásánál fogva mindenkor szükségképen tagadó tartozik lenni:

$$\lambda o\gamma.\ x > m\ \lambda o\gamma.\ e\ \{(\sqrt[m]{x} - 1)\}$$

A' b.) alattiban viszont; minthogy minden tagok folyvást állitók:

$$\lambda o\gamma.\ x < m.\ \lambda o\gamma.\ e\ \{(\sqrt[m]{x} - 1)\}$$

A' számlagok' két határainak külzése pedig:

$$m.\ \lambda o\gamma.\ e\left\{(\sqrt[m]{x} - 1) - \left(1\ \frac{-1}{\sqrt[m]{x}}\right)\right\} = m\ \lambda o\gamma.\ e.\ \frac{(\sqrt[m]{x} - 1)}{\sqrt[m]{x}}$$

2.) Továbbá: a' (217 lap) c.) alatti szám megtekintéséből

$$a = e^{A_1};\ \text{és}: \frac{1}{a} = e^{-A_1}$$

azonnal látható, hogy ezen egyenletben:

$$\text{a.)}\ \frac{1}{\mu} = A_1 = \left\{\alpha - 1\ \frac{-(\alpha - 1)^2}{2} + \frac{(\alpha - 1)^3}{3} - \frac{(\alpha - 1)^4}{4} \ldots\text{'stb.}\right\}$$

ha α-ért $\frac{1}{\alpha}$-át helyettezünk A-nak tagadóvá kelletvén válnia:

$$-A_1 = \left\{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^4 + \ldots\ \text{'stb.}\right\}$$

honnét mind az állító mind a' tagadó mennyiségek páros hatványainak állító léte miatt, mivel: $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = -\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = -\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)$ fennebbiekben (222 lap) előadott okoknál fogva:

$$\text{b.)}\ A_1 = \left\{\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^4 \ldots\ \text{'stb.}\right\}$$

3.) Tétessék (221 lapon) 17 sz. x helyett $1 + z$; leszen:

$$\lambda o\gamma.\ (1 + z) = \mu\left\{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots\ \text{'stb.}\right\}\ \text{azonképen:}$$

$$\lambda o\gamma.\ (1 - z) = -\mu\left\{z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \ldots\ \text{'stb.}\right\}\ \text{honnét}$$

$$\lambda o\gamma.\ \frac{1+z}{1-z}=2\mu\left\{z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\frac{1}{7}z^7+\ldots\ \text{'stb.}\right\}$$

tegyük továbbá: $\frac{1+z}{1-z}=x$ leszen: $z=\frac{x-1}{x+1}$ mellyből:

$$\text{a.) } \lambda o\gamma.\ x=2\mu\left\{\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7\ldots\ \text{'stb.}\right\}$$

's innét a' közszerü számlagokra nézve megkivántató helyretételekkel μ-t M-el; x-et $a=10$-el cserélvén föl:

$$\text{b.) } M=\frac{1}{2\left\{\left(\frac{9}{11}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{9}{11}\right)^7\ldots\ \text{'stb.}\right\}}$$

$$M=0,\ 43429\ \ 44819\ \ 02251\ldots$$

$$A_1=\frac{1}{M}=2,\ 30258\ \ 50929\ \ 94045\ldots$$

4.) A' legközelebbi 3.) számnak még öszvehajlóbbá leendő átváltoztatása végett tegyük:

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{x^2}{x^2-1}$$

leszen az egyenlet feloldása után: $z=\frac{1}{2x^2-1}$; nem különben mivel:

$$\lambda o\gamma.\ \frac{1+z}{1-z}=\lambda o\gamma.\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)=2\ \lambda o\gamma.\ x-\lambda o\gamma.\ (x^2-1) \text{ honnét:}$$

$$\lambda o\gamma.\ \frac{1+z}{1-z}=2\ \lambda o\gamma.x-\lambda o\gamma.\ [(x+1).\ (x-1)] \text{ tehát:}$$

$$\lambda o\gamma.\ \frac{1+z}{1-z}=2\ \lambda o\gamma.x-[\lambda o\gamma.(x+1)+\lambda o\gamma.\ (x-1)]$$

mellyeknél fogva a' 3.)dik szám alatti egyenletekben bal felül.

$\lambda o\gamma.\ \frac{1+z}{1-z}$ helyébe $2\ \lambda o\gamma.\ x-[\lambda o\gamma.\ (x+1)+\lambda o\gamma.\ (x-1)]$-et; jobb felül:

z helyébe $\frac{1}{2x^2-1}$-et; mint a' felvett egyenlet értelmében öszve tartozó értékeket helyettezvén:

$$\text{a.)}\ 2\ \lambda o\gamma.\ x - [\lambda o\gamma.\ (x+1) + \lambda o\gamma.\ (x-1)] = 2\mu \Bigg[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^7 \ldots\ldots \text{'stb.}\Bigg]$$

$$\text{b.)}\ \lambda o\gamma.\ x = \left[\frac{\lambda \sigma\gamma.\ (x+1) + \lambda o\gamma.\ (x-1)}{2}\right] + \mu \Bigg[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^7 \ldots\ldots \text{'stb.}\Bigg]$$

Mivel ezen sorzat mindenek felett hamarébb öszvehajlik különösb figyelmet érdemel; 's vele még több féle változtatásokat, tehetni, mellyeknél fogva: vagy a' rekeszbe foglalt sorzat még inkább öszvehajlóvá leszen; vagy pedig a' keresendő számlagok csupán a' nevezett sorzatok által, vagy viszont csupán ismeretes számlagok által kitétethetőkké válnak. Illyen változtatások a' következők:

5.) Jegyezzük rövidítésül a' sorzatnak egész öszvetét, a' szerint mint a' béfoglalt változó x, y, z-nek, vagy a' változónak meghatározott értékével (a)-nak tétetik, Σ-val; illyeténképen:

$$\left[\left(\frac{1}{2x^2-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^7 \ldots \text{'stb.}\right] = \Sigma(x)$$

$$\left[\left(\frac{1}{2y^2-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2y^2-1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2y^2-1}\right)^7 \ldots \text{'stb.}\right] = \Sigma(y)$$

$$\left[\left(\frac{1}{2a^2-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2a^2-1}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2a^2-1}\right)^7 \ldots \text{'stb.}\right] = \Sigma(a)$$

mellyeknél fogva leszen:

a.) $\lambda o\gamma.(x+1) = 2\ \lambda o\gamma.\ x - \lambda o\gamma.(x-1) - 2\mu\Sigma(x)$

b.) $\lambda o\gamma.(y+1) = 2\ \lambda o\gamma.\ y - \lambda o\gamma.(y-1) - 2\mu\Sigma(y)$

c.) $\lambda o\gamma.\ (z+1) = 2\ \lambda o\gamma.\ z - \lambda o\gamma.\ (z-1) - 2\mu\Sigma(z)$

annak utánna pedig ha x, y, z, számláló rendben vétetnek:

a.) $\lambda o\gamma.(x+1) = 2\ \lambda o\gamma.\ x - \lambda o\gamma.(x-1) - 2\mu\Sigma(x)$

b.) $\lambda o\gamma.\ (x) = 2\ \lambda o\gamma.\ (x-1) - \lambda o\gamma.\ (x-2) - 2\mu\Sigma(x-1)$

c.) $\lambda o\gamma.(x-1) = 2\ \lambda o\gamma.\ (x-2) - \lambda o\gamma.\ (x-3) - 2\mu\Sigma(x-2)$

's itt a' három egyenletben öt ismeretlen fordul elő, de ha tesszük $x=4$ leszen $\lambda o\gamma.\ (x-3) = 0$; minthogy az 1-nek számlaga minden rendszerben $=0$; ezenkivül $\lambda o\gamma.\ 4 = 2\ \lambda o\gamma.\ 2$; honnét két ismeretlen kivettetvén:

$$\begin{aligned}
&a.)\ \lambda o\gamma.\ 5 = 4\,\lambda o\gamma.\,2 - \lambda o\gamma.\,3 - 2\mu\Sigma(4)\\
&b.)\ 2\,\lambda o\gamma.\,2 = 2\,\lambda o\gamma.\,3 - \lambda o\gamma.\,2 - 2\mu\Sigma(3)\\
&c.)\ \lambda o\gamma.\ 3 = 2\,\lambda o\gamma.\,2 - 2\mu\Sigma(2)
\end{aligned}$$

's most már a' három ismeretlen csupán a' μ és Σ ismeretes függvények által lenne meghatározható. Azonban hogy a' sorzatok hamarább hajoljanak, más számokat lehet felvenni, mellyekben szintén csak az 5; 2; és 3; számlagai kerülnek elő. Illyenek lesznek ha tesszük a.)-nál $(x+1) = 10$; b.)-nél $(y+1)=6$; melly helyettezések után találtatik:

$$\begin{aligned}
&a.)\ \lambda o\gamma.\,5 + \lambda o\gamma.\,2 = 4\,\lambda o\gamma.\,3 - 3\,\lambda o\gamma.\,2 - 2\mu\Sigma(9)\\
&b.)\ \lambda o\gamma.\,3 + \lambda o\gamma.\,2 = 2\,\lambda o\gamma.\,5 - 2\,\lambda o\gamma.\,2 - 2\mu\Sigma(5)\\
&c.)\ \lambda o\gamma.\,5 = 4\,\lambda o\gamma.\,2 - \lambda o\gamma.\,3 - 2\mu\Sigma(4)
\end{aligned}$$

melly egyenletek feloldása után:

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma.\ 2 &= \mu\,[\,6\Sigma(9) + 10\Sigma(5) + 14\Sigma(14)\,]\\
\lambda o\gamma.\ 3 &= \mu\,[10\Sigma(9) + 16\Sigma(5) + 22\Sigma(4)]\\
\lambda o\gamma.\ 5 &= \mu\,[14\Sigma(9) + 24\Sigma(5) + 32\Sigma(4)]
\end{aligned}$$

a' Σ-val jegyzett függvények értekei pedig illetőleg:

$$\Sigma(9) = \frac{1}{161} + \frac{1}{3.(161)^3} + \frac{1}{5(161)^5} + \frac{1}{7.(161)^7} + \ldots\ \text{'stb.}$$

$$\Sigma(5) = \frac{1}{49} + \frac{1}{3.(49)^3} + \frac{1}{5.(49)^5} + \frac{1}{7.(49)^7} \ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

$$\Sigma(4) = \frac{1}{31} + \frac{1}{3(31)^3} + \frac{1}{5(31)^5} + \frac{1}{7.(31)^7} \ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

és igy lévén a' természetes számlagokra nézve $\mu = 1$; a' közszerűekre nézve pedig $\mu = 0,\ 43429\ 44819\ 03251\ldots$: lesznek a' 2; 3; 5;-nek keresett számlagai

természetes számlagok:	közszerü számlagok:
log. 2 = 0, 69314 71805 59945	Log. 2 = 0, 30102 99956 63981
log. 3 = 1, 09861 22886 68110	Log. 3 = 0, 47712 12547 19662
log. 5 = 1, 60943 79124 34100	Log. 5 = 0, 69897 00043 36019

Hogy a' szóban forgó sorzat már eddig is tetemesen öszvehajlóvá tétethetett, azon felvételen alapult; mivel ezen kitételben:

$$\lambda o\gamma.\ \frac{1+z}{1-z} = 2\mu\left\{z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 + \ldots\text{'stb.}\right\} \text{az } \frac{1+z}{1-z}\text{-ért } \frac{x^2}{x^2-1}\text{-et}$$

helyettezvén az által balfelöl a' $\lambda o\gamma.\frac{1+z}{1-z}$ helyébe egy részről ujra ismeretes számlagi viszonyokat hoztunk be, név szerint ezt: $2\,\lambda o\gamma.\,x - [\lambda o\gamma.\,(x+1) + \lambda o\gamma.\,(x-1)]$ más részről pedig ugyan akkor a' jobb oldalon kisebb értékü töreket nyertünk. Ezen körülményt azonban:

6.) Még átalánosabban lehet haszonra fordítani ha tesszük:

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{fx}{\varphi x}\text{; honnét } z=\frac{fx-\varphi x}{fx+\varphi x}\text{; és:}$$

$$\lambda o\gamma.\,fx-\lambda o\gamma.\,\varphi x=2\mu\left[\left(\frac{fx-\varphi x}{fx+\varphi x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{fx-\varphi x}{fx+\varphi x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{fx-\varphi x}{fx+\varphi x}\right)^5+\ldots\text{'stb.}\right]$$

's az (x) függvényeinek meghatározásában a' legközelebbi körülményekhez tartván magunkat, szem előtt fogjuk tartani, hogy azok valamint fentebb, ugy ezentúl is egy részről: ismeretes szorzókbol legyenek összeszerkesztve, más részről: $fx-\varphi x$-ben a' változó elő ne kerülhessen. Ezen feltételeknek pedig az ollyatén felsőbb egyenletek fognak eleget tenni, mellyek egyènlő hatványokra emelkedvén egymástol csupán az (x)-től független végső mennyiségben külzenek. Illyenek például:

a.) A' 3-dik emeletü egyenletekre nézve átalánosan:

$$\left.\begin{aligned}fx&=(x-a)(x-b)(x+a+b)=x^3+px+q\\ \varphi x&=(x+a)(x+b)(x-a-b)=x^3+px-q\end{aligned}\right\}\text{ mellyekböl találtatik:}$$

$$p=-(ab+a^2+b^2)\text{; } q=(a^2b+ab^2)\text{ következöleg:}$$

$$\frac{fx-\varphi x}{fx+\varphi x}=\frac{2q}{2(x^3+px)}\text{; } \lambda o\gamma.\frac{fx}{\varphi x}=\lambda o\gamma.\,fx-\lambda o\gamma.\,\varphi x=$$

$$=\lambda o\gamma.(x-a)+\lambda o\gamma.(x-b)+\lambda o\gamma.(x+a+b)-\lambda o\gamma.(x+a)-\lambda o\gamma.(x+b)-\lambda o\gamma.(x-a-b)$$

$$=2\mu\left[\frac{q}{x^3+px}+\frac{1}{3}\left(\frac{q}{x^3+px}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{q}{x^3+px}\right)^5+\ldots\ldots\text{'stb.}\right]$$

's tétetvén különösen $b=1$; honnét $p=-3$; $q=2$ leszen:

$$fx=(x-1)(x-1)(x+2)=x^3-3x+2$$
$$\varphi x=(x+1)(x+1)(x-2)=x^3-3x-2\text{ tehát:}$$

$$\frac{fx-\varphi x}{fx+\varphi x}=\frac{4}{2(x^3-3x)}=\frac{2}{x^3-3x}\text{ és:}$$

1.) $2\,\lambda o\gamma.\,(x-1)+\lambda o\gamma.\,(x+2)-2\,\lambda o\gamma.\,(x+1)-\lambda o\gamma.\,(x-2)=$

$$=2\mu\left[\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5+\ldots\text{'stb.}\right]$$

b.) A' negyedik emeletü egyenletekre nézve különösen:

$$2.\ \begin{cases} \varphi x = x^2(x-5)\,(x+5) & = x^4 - 25x^2 \\ fx = (x-3)(x+3)\,(x-4)\,(x+4) = x^4 - 25x^2 + 144 & \text{mellyből:} \end{cases}$$

$$\frac{fx - \varphi x}{fx + \varphi x} = \frac{144}{2x^4 - 50x^2 + 144} = \frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}\ \text{és:}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\lambda o\gamma.\,x + \lambda o\gamma.\,(x-5) + \lambda o\gamma.\,(x+5) \\ -\lambda o\gamma.\,(x-3) - \lambda o\gamma.(x+3) - \lambda o\gamma.(x-4) - \lambda o\gamma.(x+4) \end{array}\right\} = 2\mu\left[\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}\ \text{'stb.}\right]$$

$$3.)\ \begin{cases} fx = x^2(x+5)^2 & = x^4 + 10x^3 + 25x^2 \\ \varphi x = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36 & \text{mellyekből:} \end{cases}$$

$$\frac{fx - \varphi x}{fx + \varphi x} = \frac{36}{2x^4 + 20x^3 + 50x^2 - 36} = \frac{18}{x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 18}\ \text{és:}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\lambda o\gamma.\,x + 2\,\lambda o\gamma.\,(x+5) \\ -\lambda o\gamma.(x-1) - \lambda o\gamma.(x+2) - \lambda o\gamma.(x+3) - \lambda o\gamma.\,(x+6) \end{array}\right\} = 2\mu\left[\frac{18}{x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 18}\ \text{'stb.}\right]$$

c.) Az 5-dik emeletü egyenletek közül:

$$fx = (x+2)\,(x+4)\,(x+10)\,(x-7)\,(x-9) = x^5 - 125x^3 + 3004x + 5040$$

$$\varphi x = (x-2)\,(x-4)\,(x-10)\,(x+7)\,(x+9) = x^5 - 125x^3 + 3004\,x - 5040$$

mellyekből:

$$\frac{fx - \varphi x}{fx + \varphi x} = \frac{5040}{x^5 - 125x^3 + 3004x}\ \text{és:}$$

$$4.)\ \left.\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\,(x+2) + \lambda o\gamma.\,(x+4) + \lambda o\gamma.\,(x+10) + \lambda \sigma\gamma.\,(x-7) + \lambda o\gamma.\,(x-9) \\ -\lambda o\gamma.(x-2) - \lambda o\gamma.(x-4) - \lambda o\gamma.\,(x-10) - \lambda o\gamma.\,(x+7) - \lambda o\gamma.\,(x+9) \end{array}\right\}$$

$$= 2\mu\left[\frac{5040}{x^5 - 125x^3 + 3004x} \ldots\ \text{'stb.}\right]$$

d.) A' 6-dik emeletü egyenletekből:

$$fx = x^2\,(x-7)^2.\,(x+7)^2 \qquad = x^6 - 98x^4 + 2401\,v^2$$

$$\varphi x = (x-3)\,(x+3)\,(x-5)\,(x+5)\,(x-8)(x+8) = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400$$

mellyekből:

$$\frac{fx - \varphi x}{fx + \varphi x} = \frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200}\ \text{és:}$$

$$5.)\ \left.\begin{array}{l} 2\lambda o\gamma.\,x + 2\lambda o\gamma.\,(x-7) + 2\,\lambda o\gamma.\,(x+7) \\ -\ \lambda o\gamma.\,(x-3) - \lambda o\gamma.(x+3) - \lambda o\gamma.(x-5) \\ -\ \gamma o\gamma.(x+5) - \lambda o\gamma.(x-8) - \lambda o\gamma.(x+8) \end{array}\right\} = 2\mu\left[\frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200}\ \text{'stb.}\right]$$

'S ezen utóbbi kitételben könnyen észrevehetjük hogy ha az (x)-nek nagyotska például 1000-et felül haladó értéket adunk, a' rekeszbeli sorzat egészen elmaradható; 's a' további számlagokat csupán egyszerü öszve adás és kivonás által kereshetjük (Lacroix Traité du Calc. differ. Tome I.)

6.) Ha nehány egymásutáni számlagok feltaláltattak, a' közben eső számokét, beiktatás (interpolatio) által kereshetjük. (l. D. Vállas Antal egyetemes számtudomány Pest 1838. 23 's köv. lapokon). Mivel azonban az ide tartozó tanitmányok egy külön vált szakaszt alkotnak, körünkhöz közelebbieknek véljük a' következendő hason nemü lehozatokat:

a.) Az öszvehajló sorzatok' tulajdonsága lévén egy részről: hogy azoknak minél több tagai' öszveszámításával az igaz értékhez mind inkább közelíthetünk; más részről: az illyetén végetlen sorzatok' értékének kiszámításában, véges számu tagok' öszvezésével meg kelletvén elégednünk: ezen nézetek' folytában a' végetlen sorzatok' valóságos kiszámításai nem máskép, hanem mindenkor valami felsőbb rangu egyenlet alakjában tűnnek fel, mellyben: (m)-nek véges értékével a' további tagokat kihagyva:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots A_nx^m$$

b.) Ezen egyenletben (x) változó lévén, ha annak értékét valami felsőbb rangu számláló haladás, átalában (n)-el jelelhető tagai száma szerint vesszük, leszen:

$$y = A_0 + A_1n + A_2n^2 + A_3n^3 + \ldots\ldots\ldots A_nn^m$$

ugyan azon kitétel mellyet (46. l. c.) alatt) a' felsőbb rangu számláló haladások átalános egyenletére nézve találtunk. Következőleg:

c.) A' számláló haladás egymásutáni tagait n_0; n_1; n_2..... 'stb. 's a' megfelelő számlagokat Log. n_0; Log. n_1; Log. n_2.... 'stb-vel jelelvén, az öszvetartozó értékek' helyettezésével, tétetvén:

$$\text{Log.}\, n_0 = A_0 + A_1n_0 + A_2n_0^2 + A_3n_0^3 + A_4n_0^4 \ldots\ldots + A_mn_0^m$$
$$\text{Log.}\, n_1 = A_0 + A_1n_1 + A_2n_1^2 + A_3n_1^3 + A_4n_1^4 \ldots\ldots + A_mn_1^m$$
$$\text{Log.}\, n_2 = A_0 + A_1n_2 + A_2n_2^2 + A_3n_2^3 + A_4n_2^4 \ldots\ldots + A_mn_2^m$$

. . . . , .

az adott számokból, 's azoknak ismeretes számlagaiból, annyi egyenleteket formálhatunk, mennyi az A_0; A_1; A_2; ..... A_m-el jegyzett ösztevők' meghatározhatására szükséges.

Például: Hogy a' nevezett helyen felhozott számoknál maradjunk, adva legyenek: Log. 100=2,000000; Log. 101=2,004 321; Log. 102=2,008 600; Log. 103 = 2,012,837; Log. 104 = 2,017 033; leszen:

$$2{,}000\,000 = A_0 + A_1(100) + A_2(100)^2$$
$$2{,}004\,321 = A_0 + A_1(101) + A_2(101)^2$$
$$2{,}008\,600 = A_0 + A_1(102) + A_2(102)^2$$

melly egyenletek' feloldásából találtatván:

$$A_0 = 1{,}355800\,;\quad A_1 = 0{,}008542;\quad A_2 = -0{,}000021$$

a' közbe eső tizedes jegyekre nézve kell lenni:

$$\text{Log. } 100{,}1 = 1{,}355800 + 0{,}008542.\,100{,}1 - 0{,}000021.(100{,}1)^2 = 2{,}000434$$
$$\text{Log. } 100{,}2 = 1{,}355800 + 0{,}008542.\,100{,}2 - 0{,}000021.(100{,}2)^2 = 2{,}000868$$
$$\text{Log. } 100{,}3 = 1{,}355800 + 0{,}008542.\,100{,}3 - 0{,}000021.(100{,}3)^2 = 2{,}001301$$
$$\text{Log. } 100{,}4 = 1{,}355800 + 0{,}008542.\,100{,}4 - 0{,}000021.(100{,}4)^2 = 2{,}001734$$
$$\text{Loo. } 100{,}5 = 1{,}355800 + 0{,}008542.\,100{,}5 - 0{,}000021.(100{,}5)^2 = 2002166$$

. . . .

Nem különben: Mivel a' 48-dik lapon f.) alatt előadottak értelmében a' tagok' számát szabadon változtathatjuk, a' nélkül hogy ezen változtatásnak a' számláló haladás külzésére 's természetére befolyása volna, tévén ehez képest: $n_0 = 0$; $n_1 = 1$; $n_2 = 2$; .... 'stb. következik a' mondottakbol egyszersmind

$$2{,}000000 = A_0$$
$$2{,}004321 = A_0 + A_1 + A_2$$
$$2{,}008600 = A_0 + 2A_1 + 4A_2$$

mellyekből találtatván:

$$A_0 = 2{,}000\,000\,;\quad A_1 = 0{,}004342\,;\quad A_2 = -0{,}000021$$

tehát a' közbe eső tizedes jegyekre nézve:

$$\text{Log. } 0{,}1 = 2{,}000\,000 + 0{,}004342.0{,}1 - 0{,}000021.(0{,}1)^2$$
$$\text{Log. } 0{,}2 = 2{,}000\,000 + 0{,}004342.0{,}2 - 0{,}000021.(0{,}2)^2$$
$$\text{Log. } 0{,}3 = 2{,}000\,000 + 0{,}004342.0{,}3 - 0{,}000021.(0.3)^2$$

. . . .

$$\text{Log. } 1{,}1 = 2{,}000\,000 + 0{,}004342.1{,}1 - 0{,}000021.(1{,}1)^2$$
$$\text{Log. } 1{,}2 = 2{,}000\,000 + 0{,}004342.1{,}2 - 0{,}000021.(1{,}2)^2$$
$$\text{Log. } 1{,}3 = 2{,}000{,}000 + 0{,}004342.1{,}3 - 0{,}000021.(1{,}3)^2$$

. . . .

's ezekben az ösztevők ugyan azok, mintha az egymásutáni külzésekből származtatott alkatkában: (l. az idézett helyen) $a + n\triangle a + \frac{n.n-1}{1.2}\triangle^2 a$ . . . . 'stb. az (n) ugyan azon hatványához tartozó ösztevők egybeszedetnek, azaz:

$$A_0 = a = 2{,}000\,000$$

$$A_1 = \triangle a - \frac{\triangle^2 a}{2} = 0{,}004342$$

$$A_2 = \frac{\triangle^2 a}{2} = -0{,}000021.$$

7.) Azon különféle nézetek között, mellyeknél fogva a' számlagokat sorzatokra ki lehet fejteni, a' már előadottakon kivül még a' következők: mint a' mellyek többféle módosítások alapját teszik, különösebb figyelmet érdemelnek.

a.) Legyen az alapszám $= \alpha$; $z = \alpha^x$; tehát a' z-nek keresendő számlaga $= x$. Tegyük ezenkivül egy részröl: hogy x-nek akarmi felvételhető értékét határozatlan mennyiségek által jelenthessük $x = \frac{m}{n}$; melly közben m; és n; együtt és egyszersmind ugyan azon viszonyban végetlenül nevekedhető mennyiségeket tegyen; más részről: hogy kitételeink a' kétszaki oktatmány szerint kifejthetők legyenek, $\alpha = 1 + \omega$; tehát: $z = \alpha^x = (1+\omega)^{\frac{m}{n}} = [(1+\omega)^{\frac{1}{n}}]^m$ találni fogjuk:

$$\text{b.)}\ (1+\omega)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\omega + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.\ 2.}\omega^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3.}\omega^3 \ldots \text{'stb.}$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\left[\omega + \frac{\frac{1}{n}-1}{2}\omega^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2.\ \ 3.}\omega^3 \ldots \text{'stb.}\right]$$

vagy is, a' rekesz alá foglalt sorzatot S-el jegyezvén:

$$(1+\omega)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{S}{n}; \text{ honnét:}$$

$$z = \alpha^x = (1+\omega)^{\frac{m}{n}} = [(1+\omega)^{\frac{1}{n}}]^m = \left(1 + \frac{S}{n}\right)^m$$

továbbá mivel $n = \frac{m}{x}$; és: $z^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{S}{n}$

$$\frac{S}{n} = z^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{Sx}{m} = z^{\frac{1}{m}} - 1 \quad \text{mellyböl:}$$

$$1.)\ x = \frac{m}{S}\left(z^{\frac{1}{m}} - 1\right); \quad \text{és } 2.)\ z = \left(1 + \frac{Sx}{m}\right)^m$$

's ezen két utóbbi kitételek közül egyikben x lévén a' z-nek, másikban z az x-nek kölcsönösen függvénye; hogy az elsőbbnek kifejtését eszközölhessük, tétetvén $z = (1+u)$ találtatik:

$$\text{c.)}\ (1+u)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}\left\{u + \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2}u^2 + \frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{2.\ \ 3.}u^3 + \ldots\text{'stb.}\right\}$$

$$\text{honnét:}\quad x = \frac{1}{S}\left\{u - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2}u^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)}{2.\ \ 3.}u^3 \ldots\ldots\text{'stb.}\right\}$$

Mostan ha:

d.) Mind (m)-et mind (n)-et a' fentebb a.) alatt mondottak értelmében együtt és egyszersmind végetlenül neveljük, leszen b.) szerint a' rekesz alatti sorzat, mellyet ezen esetben Σ-nak nevezzünk:

$$\Sigma = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \ldots\text{'stb. következőleg:}$$

$$x = \frac{1}{\Sigma}\left\{u - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2}u^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{2.\ \ 3.}u^3 - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{2.\ \ 3.\ \ 4.}u^4\right\}$$

az az: mivel (n)-nek végetlen értékével egyszersmind (m) is végetlenné válik:

$$x = \lambda o\gamma.\, z = \frac{1}{\Sigma}\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots\text{'stb.}\right\}$$

e.) Ezen kitétel azonban az ω-nak meghatározott, még pedig hogy az S-el és Σ-val jegyzett sorzatok öszvehajoljanak; $\omega < 1$ értékével találván helyet, ahoz képest csupán egy bizonyos felvételhez 's alapszámhoz alkalmazott számlagokat terjeszthet elő. Tudjuk azonban, hogy az egyik rendszerbe tartozó számlagokat más rendszerbeliekké változtathatjuk, ha az új rendszer alapszámának az elébbi rendszerhez képest kiszámított számlagával, ugyan azon elébbi rendszer számlagait elosztjuk, mellynél fogva az új rendszer alapszámát a-nak nevezvén, ha az ebbe foglalt számlagokat Log-al jelentjük, legközelebbi kitételünk imigy fog állani:

$$x = \mathrm{Log.}\, z = \mathrm{Log.}(1+u) = \frac{1}{\Sigma\ \lambda o\gamma.\, a}\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots\text{'stb.}\right\}$$

és ha tesszük: $\frac{1}{\Sigma.\ \lambda o\gamma.\ a} = M$

$$x = \text{Log.} z = \text{Log.}(1+u) = M \left\{ u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots \text{ 'stb.} \right\}$$

éppen úgy, mint a' fentebbiekben egészen különböző útakon találtuk.

A' mi a' másik esetet illeti, mellyben z viszont x által adatik, a' fentebb b.) alatti alkatot kifejtve, leszen:

$$\text{a.) } z = \left(1 + \frac{Sx}{m}\right)^m = 1 + \frac{m.Sx}{1.m} + \frac{m.m-1}{1.\ 2.}\left(\frac{Sx}{m}\right)^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{Sx}{m}\right)^3 \ldots \text{'stb.}$$

tehát (m)-nek (n)-nek végetlen értékével, S helyett Σ; m—1; m—2; m —3..'stb. helyett (m) tétetvén:

$$\text{b.) } z = 1 + \frac{\Sigma}{1}.x + \frac{\Sigma^2 x^2}{1.2} + \frac{\Sigma^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\Sigma^4 x^4}{1.2\ 3.4.} + \ldots \text{'stb.}$$

honnét azon rendszerben mellynek alapja a; mivel tudvalévőképen: (210 l. 10 sz.)

$$\text{Log. } z = \frac{x}{\lambda o\gamma.\, a}; \text{ tehát: } x = \text{Log. } z\ \lambda o\gamma.\, a;\ \Sigma x = \Sigma.\text{Log. } z\ \lambda o\gamma.\, a = \frac{\text{Log. } z}{M}$$

leszen végezetre:

$$\text{c.) } z = 1 + \frac{\text{Log.} z}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\text{Log.} z}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\text{Log.} z}{M}\right)^3 + \ldots \text{'stb.}$$

's különösen a' természetes rendszerben az alapszámot (e)-nek nevezvén, mellynek számlaga = 1; 's illetőleg M = 1 értékével:

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.} + \frac{1}{1.2.3.4.5.} \ldots \text{'stb.}$$

vagy is, mivel átalában: $\frac{1}{\Sigma\lambda o\gamma.\ a} = M$'s a' természetes rendszerben különösen

$\frac{1}{\Sigma\lambda o\gamma.\ e} = 1$; honnét: $\frac{1}{\Sigma} = \lambda o\gamma.\ e = \frac{\text{Log. } e}{\text{Log. } a}$; valami rendszerből a másikra általmenetelül b.)-ben Σ értékét helyettezvén:

$$z = a^x = 1 + \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e}.x + \left(\frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e}\right)^2.\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } e}\right)^3.\frac{x^3}{1.2.3} \ldots \text{'stb.}$$

Melly lehozatokat folytatólag észrevehetjük :

α.) Mivel az S; Σ sorzatok öszvehajlására $\omega < 1$ kívántatik, mellyek kisebbedésével mind inkább öszvehajlókká lesznek; ω-át végetlenül fogyható mennyiségnek tekintvén, ha ehezképest n-nek végetlenül nevekedhetését $\frac{1}{\omega}$-al jelentjük, állani fognak a' következő egyenletek

átalánosan (231 lap. b.) alatt)

$$(1+\omega) = 1+S\omega;\quad S\omega = (1+\omega)^{\omega} - 1.$$

$$S = \frac{(1+\omega)^{\omega}-1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left\{\omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^4}{4} + \ldots\ldots \text{'stb.}\right\}$$

különösebben (n)-nek végetlenül nevekedhető 's ugyan akkor ω-nak végetlenül fogyható értékével:

$$\Sigma = \frac{\text{Lim.}\,(1+\omega)^{\omega}-1}{\omega} = \text{Lim.}\,\frac{1}{\omega}\left\{\omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \ldots\ldots \text{'stb.}\right\}$$

az az: mivel ez esetben a' rekesz alatti sorzat' felsőbb hatványai elenyésznek:

$$\Sigma = \frac{\text{Lim.}\,(1+\omega)^{\omega}-1}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} = 1$$

tehát Σ ezen értékével az alapszámot (e)-nek nevezvén (233 lapon a' b.) alatti sorzat:

$$e^x = z = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

és ha tesszük $x = 1$ mellynél fogva a' keresett alapszám ismeretessé válik

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2.} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots\ldots \text{'stb.}$$

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59\ldots\ldots \text{'stb.}$$

β.) Mivel Σ-nak $= 1$ és (e)-nek $= 2{,}718\ldots$ 'stb. értékét csak azon felvétel alatt találtuk melly szerint $\frac{1}{n} = \omega$ tétetett; ha ezen megszorítástol elállván a' továbbiakra nézve átalánosan feltesszük hogy ezen kitételben $(1+\omega)^{\frac{1}{n}}$ az ω és $\frac{1}{n}$ között nem az egyenlőség viszonya, hanem akármi más szabadon felvethető arányssági viszony $\omega = \frac{k}{n}$ létezzék, az $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ vagy $(1+k\omega)^{\omega}$-nak a' fentebbiekhez mindenben hasonlatos kifejtéséből következik: hogy, minden egyéb esetekben Σ-nak az egységtől 's egyszersmind (a)-nak 2, 718....-tol különböző értékei lesznek, mint már fentebb a' következő kitételeket találtuk:

$$\alpha^x = z = 1 + \frac{\Sigma}{1}.x + \frac{\Sigma^2.x^2}{1.2} + \frac{\Sigma^3 x^3}{1.2.3} \dots \text{'stb.}$$

mellyben ha $\alpha^x = z$; $\Sigma = \frac{\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e} = \text{lognat.}\ \alpha$

vagy ha $a^x = z$; $\Sigma = \frac{\text{Log.a}}{\text{Log.e}} = \text{lognat. a}$; és:

$$z = \alpha^x = 1 + \log.\alpha x + \frac{(\log.\alpha x)^2}{1.2.} + \frac{(\log.\alpha x)^3}{1.2.3} + \frac{(\log.\alpha x)^4}{1.2.3.4.} + \dots \text{'stb.}$$

$$z = a^x = 1 + \log.ax + \frac{(\log.ax)^2}{1.2} + \frac{(\log.ax)^3}{1.2.3.} + \frac{(\log.ax)^4}{1.2.3.4.} + \dots \text{'stb.}$$

γ.) Ha, mint a' természeti rendszerben találtuk, $S = \Sigma = 1$-nek vétetik kell lenni: $\text{Lim.}\ (1+\omega)^\omega = 1 + \omega$ és $\text{Lim.}\ (1+\omega) = \text{Lim.}\ (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ honnét $1 = \text{Lim.}\ (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ (18. lap). Minden egyéb felvételekre nézve pedig $\text{Lim.}\ (1+\Sigma\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ mellyben Σ-nak egységtől különböző értéket adunk, egyszersmind: $\text{Lim.}\ (1+\Sigma\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ egységtől különböző más valami átalánosan határozatlan mennyiséget tartozván jelenteni, tehetjük:

$$\text{Lim.}\ (1+\Sigma\omega)^{\frac{1}{\omega}} = \alpha \quad \text{tehát:}$$

δ.) Legyen továbbat $z = \alpha^x = \text{Lim.}\ (1+\Sigma\omega)^{\frac{x}{\omega}}$ kifejtve:

$$z = \alpha^x = \text{Lim.}\left\{1 + \frac{x}{\omega}.\Sigma\omega + \frac{\frac{x}{\omega}\left(\frac{x}{\omega}-1\right)}{1.\ 2.}(\Sigma\omega)^2 + \frac{\frac{x}{\omega}\left(\frac{x}{\omega}-1\right)\left(\frac{x}{\omega}-2\right)}{1.\ 2.\ 3.}(\Sigma\omega)^3 \text{'stb}\right\}$$

$$\text{vagy: } z = \alpha^x = \text{Lim.}\left\{1 + \Sigma x + \frac{x(x-\omega)}{1.2.}\Sigma^2 + \frac{x(x-\omega)\ x-2\omega)}{1.\ 2.\ 3.}\Sigma^3 + \dots \text{'stb.}\right\}$$

minekokáért ω-nak elenyésztével

$$z = \alpha^x = 1 + \Sigma x + \frac{(\Sigma x)^2}{1.2.} + \frac{(\Sigma x)^3}{1.2.3.} + \frac{(\Sigma x)^4}{1.2.3.4.} + \dots \text{'stb.}$$

ε.) Mivel $\text{Lim.}(1+\Sigma\omega)^{\frac{1}{\omega}}=\alpha$; $\text{Lim.}(1+\Sigma\omega)=\alpha^{\omega}$

$\text{Lim. } 1+\text{Lim.}\Sigma\omega=\alpha^{\omega}$ az az: $\text{Lim.}\Sigma\omega=\alpha^{\omega}-1$

ω-nak elenyésztével vagy (n)-nek végetlenül nöttével

$$\Sigma=\frac{\alpha^{\omega}-1}{\omega}=n\left(\alpha^{\frac{1}{n}}-1\right)=\text{lognat. }\alpha$$

'S mind ezeknek egybevetéséből következik:

ζ.) Hogy az előadott nézetek szerint a' Σ-val jegyzett sorzatok a' természeti rendszerben ugyan és különösen: a' végetlenül fogyatkozó kétféle mennyiségek egyenlőségét más rendszerekben pedig: azoknak egymásközti megállapított arányát terjesztik elő. Más szóval: hogy az n-nek végetlenül nöttével végetlenül fogyatkozó ω közötti megállapított viszony

a' természeti rendszerben $\omega=\frac{1}{n}$ és $\text{Lim. } n\omega=1=\text{lognat. e}$

más rendszerekben pedig: $\omega=\frac{\Sigma}{n}$ és $\text{Lim. } n\omega=\Sigma=\text{lognat. }\alpha$.

III. A' számlagi viszonyok' némelly alkalmazásai.

1.) A' fentebbiekben kifejtett 's már többször emlékezetbe hozott ezen viszonyok következtében:

$$z=\alpha^{x}=1+\frac{A_1x}{1}+\frac{A_1^2x^2}{1.2}+\frac{A_1^3x^3}{1.2.3}+\frac{A_1^4x^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\text{ 'stb.}$$

$$=1+\frac{\lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,e}\,\frac{x}{1}-\left(\frac{\lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,e}\right)^2\frac{x^2}{1.2}+\left(\frac{\lambda o\gamma.\,x}{\lambda o\gamma.\,e}\right)\frac{x^3}{1.2.3.}+\ldots\ldots\text{ 'stb.}$$

$$=1+\frac{\text{lognat. x}}{1}+\frac{(\text{lognat. x})^2}{1.2.}+\frac{(\text{lognat. x})^3}{1.2.3.}+\ldots\ldots\text{ 'stb.}$$

honnét $z^m=\alpha^{xm}$ tehát x-nek mx-et helyettezvén:

$$z^m=(\alpha^x)^m=1+\frac{mA_1x}{1}+\frac{(mA_1)^2x^2}{1.2.}+\frac{(mA_1)^3x^3}{1.2.3.}+\ldots\ldots\text{ 'stb.}$$

$$=1+\frac{m\,\lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,e}\,x+\left(\frac{m\,\lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,e}\right)^2\frac{x^2}{1.2}+\left(\frac{m\,\lambda o\gamma.\,\alpha}{\lambda o\gamma.\,e}\right)^3\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\text{ 'stb.}$$

$$=1+\frac{\text{lognat. }\alpha\,x}{1}+\frac{(\text{lognat. }\alpha)^2\,x^2}{1.2}+\frac{(\text{lognat. }\alpha)^3x^3}{1.2.3.}+\ldots\ldots\text{ 'stb.}$$

láthatni:

a.) Hogy az $(\alpha)^x$-nek megfelelő kifejtéseket akarmi (m)-el jegyezhető hatványra könnyü felemelni, 's leszen:

$$\left\{1+\frac{A_1x}{1}+\frac{A_1^2.x^2}{1.2}+\ldots\right\}^m=1+\frac{m.A_1x}{1}+\frac{(m.A_1)^2x^2}{1.2}+\frac{(m.A_1)^3x^3}{1.2.3.}+\ldots\text{'stb.}$$

$$\left\{1+\frac{\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e}x+\left(\frac{\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e}\right)^2\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right\}^m=1+\frac{m\,\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e}x+\left(\frac{m\,\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e}\right)^2\frac{x^2}{1.2}+$$

$$\left(\frac{m\,\lambda o\gamma.\alpha}{\lambda o\gamma.e}\right)^3\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\text{'stb.}$$

$$\left\{1+\text{lognat.}\,\alpha x+\frac{(\text{lognat.}\,\alpha)^2.x^2}{1.\,2.}+\ldots\text{'stb.}\right\}=1+m\,\text{lognat.}\,\alpha x$$

$$+(m.\,\text{lognat.}\,\alpha)^2\frac{x^2}{1.2.}+\frac{(m\,\text{lognat.}\alpha)^3x^3}{1.2.3.}+\ldots\text{'stb.}$$

b.) Nem különben, mivel ha $z=e^x$ tehát:

$$z=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\text{'stb.}$$

$$=1+\text{lognat.}\,z+\frac{(\text{lognat.}\,z)^2}{1.2.}+\frac{(\text{lognat.}\,z)^3}{1.2.3.}+\frac{(\text{lognat.}\,z)^4}{1.2.3.4.}+\ldots\text{'stb. honnét:}$$

$$z^m=(e^x)^m=\left\{1+\text{lognat.}\,z+\frac{(\text{lognat.}\,z)^2}{1.\,2.}+\frac{(\text{lognat.}\,z)^3}{1.\,2.\,3.}+\frac{(\text{lognat.}\,z)^4}{1.\,2.\,3.\,4.}+\ldots\right\}^m$$

$$=1+m\,\text{lognat.}\,z+\frac{(m\,\text{lognat.}\,z)^2}{1.\,2.}+\frac{(m\,\text{lognat.}\,z)^3}{1.\,2.\,3.}+\frac{(m\,\text{lognat.}\,z)^4}{1.\,2.\,3.\,4.}+\ldots\text{'stb.}$$

ez utóbbi egyenleteket, a' messzire kivántató gyökerek könnyebb kihúzásának eszközlésére használhatjuk.

Például. Briggs a' 10-nek □ gyökerét egymásután 54szer kihúzván találta

$${}_{10}2^{\frac{1}{54}}=1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35\ldots\ldots$$

a' fentebbiekhez képest pedig, mivel $2^{\frac{1}{54}}=4^{\frac{1}{27}}=8^{\frac{1}{18}}$ az egységet egymásután 2-vel 54-szer; vagy 4-el 27-szer; vagy 8-al 18-szor osztván.

$$2^{\frac{1}{54}}=0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 827\ldots\ldots$$

és lognat $10=2,\ 30258\ 50929\ 94045\ 684\ldots\ldots\ldots$

tétessék $m=2^{\frac{1}{54}}$; találtatik:

10) $2^{\frac{1}{54}} = 1, + 0,\ 0^{15}\ 12781\ 91493\ 20032\ 3368\ldots\ldots\ldots$

$+ 0,\ 0^{32}\ 8167\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 34496\ \ldots\ldots$

2.) A' sokszaku átalános taga' kifejtésében

a.) Ha a' természetes számlagok' ezen átalános egyenletét tekintjük:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

azonnal láthatni hogy x-nek ux-et helyettezvén leszen:

$$e^{ux} = 1 + \frac{ux}{1} + \frac{u^2x^3}{1.2} + \frac{u^3x^3}{1.2.3} + \frac{u^4x^4}{1.2.3.5}\ldots\ldots \text{'stb.}$$

melly kifejtés végetlenül lévén folytatandó, az egyenlet' jobbik oldalán az (u)-nak minden egész hatványai, az (x)-nek ugyan azon hatványaival öszvekapcsolva jőnek elő; 's a' kifejtett sorzat' átalános taga (k)-nak akarmi egész számot jelentő értékével:

$$\frac{u^k x^k}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots k}$$

b.) Hasonló kifejtés találván helyet akkor is, ha az (u) több, vagy akar végetlen számú tagokbol öszvetett mennyiség, nem különben (u)-nak $(a + b + c + d + e + \ldots\ldots\ldots \text{'stb.})$ sokszakút helyettezvén:

$$e^{(a+b+c+d+\ldots\text{'stb.})x} = 1 + \frac{(a+b+c+d+\ldots\ldots\text{'stb.})x}{1} + \frac{(a+b+c+d\ldots\text{'stb.})^2x^2}{1.\ 2.}\text{'stb.}$$

's a' kifejtett sorzat átalános taga (k)-nak akarmi egész számot jelentő értékével:

$$\frac{(a + b + c + d + e\ldots\ldots \text{'stb.})^k x^k}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots\ldots k}$$

c.) Minthogy $e^{(a+b+c+d+\ldots)x} = e^{ax}.\ e^{bx}.\ e^{cx}.\ e^{dx}\ldots\ldots$'stb. a' kétféle kitétel szerint kettős kifejtést eszközölhetünk, 's leszen az egyenletből:

$$1 + \frac{(a + b + c + d\ldots)^2x}{1} + \frac{(a + b + c + d + \ldots)^2x^2}{1.\ 2} + \frac{(a+b+c+d+\ldots)^3x^3}{1.\ 2.\ 3} + \text{'stb}$$

$$\left.\begin{array}{l} = \left(1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2.} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right) \text{ mellyeknek} \\ \times \left(1 + \frac{bx}{1} + \frac{b^2x^2}{1.2.} + \frac{b^3x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right) \text{ átalános} \\ \times \left(1 + \frac{cx}{1} + \frac{c^2x^2}{1.2.} + \frac{c^3x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right) \text{ tagai} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \frac{a^p x^p}{1.2.3\ldots\ldots p} \\ \frac{b^q x^q}{1.2.3\ldots\ldots q} \\ \frac{c^r x^r}{1.2.3\ldots\ldots r} \end{array}$$

következőleg az átalános tagok' egyenlete:

$$\frac{(a+b+c+d+c\ldots)^k x^k}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots k} = \frac{a^p x^p}{1.2.3\ldots p} \times \frac{b^q x^q}{1.2.3\ldots q} \times \frac{c^r x^r}{1.2.3\ldots r} \ldots\ \text{'stb.}$$

tehát a' k-nak meghatározott = m érték adatván a' sokszakú' m-dik hatványának kifejtése:

$$(a+b+c+d+\ldots)^m x^m = \frac{(1.\ 2.\ 3\ldots m)\ (a^p.\, b^q.\, c^r.\, d^s\ldots)x^{p+q+r+s\ldots}}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r\ldots\text{'stb.}}$$

mellyben $x^m = x^{p+q+r+s}\ldots$

az az:

$m = p+q+r+s\ldots$ 'stb. tartozván lenni,

a' kérdéselt hatvány' kifejtésére $m = (p+q+r+s\ldots$ 'stb.)-nak a' feltett egyenlettel megállható minden értékeit öszve kell szednünk, 's illy értelemben:

$$(a+b+c+d+e\ldots\text{'stb.})^m = \frac{(1.2.3\ldots m)\ a^p\, b^q\, c^r\, d^s\ldots\text{'stb.}}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q \times 1.2.3\ldots r \times 1.2.3\ldots s}$$

d.) Mivel mindazáltal ezen lehozatok' alapjai szerint, a' sokszakúnak kifejtésében annak csupán egész hatványai kerültek elő, 's így a' megmutatások is csak az egész hatványokra nézve állhatnak: hogy azokat szélesebben az (m)-nek akarmi átalános értékére kiterjeszthessük, tegyük fel hogy a' sokszakú két részre osztassék, 's legyen a' kétszaki oktatmány szerint, (k)-nak akarmi felvétethető értékével kifejtve:

$$[a+(b+c+d+e\ldots)]^k = a^k + \frac{k\, a^{k-1}}{1}(b+c+d+e\ldots) + \frac{k.k-1.}{1.2} a^{k-2}(b+c+d+e)^2$$

's ezen kifejtés' átalános taga:

$$\frac{(k.\ k-1.\ k-2.\ k-3\ldots\ldots k-n+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots n}.\ a^{k-n}(b+c+d+e\ldots\ldots)^n$$

mellyben tehát (k)-nak akarmi felvétethető érték adathatik, (n)-nek pedig szükségképen mindenkor állító egész értéke leszen. Megmutattatott pedig legközelebb az egész számokra nézve:

$$(b+c+d+e\ldots)^n = \frac{1.\ 2.\ 3\ldots n(b^p\, c^q\, d^r\ldots\text{'stb.})}{1.\ 2.\ 3\ldots p \times 1.\ 2.\ 3\ldots q \times 1.\ 2.\ 3\ldots r \times\ldots\text{'stb.}}$$

ha tehát (k)-nak, szélesebben kiterjesztve akarmi felvétethető meghatározott = (m) értéket tulajdonítunk, átalánosan:

$$(a+b+c+d+\ldots.)^m = \frac{(m.m-1.m-2\ldots.m-n+1)\, a^{m-n} b^p c^q d^r \ldots.. \text{'stb.}}{1.2\;3\ldots.\; p \times 1.2.3\ldots.\; q \times 1.2.3.\ldots\; r \times \ldots\text{'stb.}}$$

q, r, s....nek a' megfelelő; $n = p + q + r + s\ldots.$'stb. egyenlethez tartozandó minden értékeit öszveszedvén 's helyettezvén. (mint fentebb 81. lapon.)

3.) Az egymásutáni szorzók' tevetének öszvehajlása' elitélésében:

Mellyet rendszerünkbe szőve, szabad legyen Ettingshausen különösen ajánlható kézi könyve után (Vorlesungen über die höhere Mathematik. Wien 1827.) elő adni.

Jegyezzük a' szemlélet alá veendő szorzókat:

$$u_o;\; u_1;\; u_2;\; u_3;\; u_4;\; \ldots\ldots.\; u_n;\; u_{n+1}\ldots. \text{ el 'stb.}$$

mellyeknek tevetők:

$$(1)\quad u_o . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots\ldots\; u_n . u_{n+1} \ldots\ldots \text{'stb. és mivel:}$$

$$u_o = e^{\log u_o};\; u_1 = e^{\log. u_1};\; u_2 = e^{\log. u_2};\; \ldots.. \text{'stb. honnét:}$$

$$u_o . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots\ldots\; u_n . u_{n+1} \ldots. = e^{\log. u_0 + \log. u_1 + \log. u_2 + \log. u_3 + \ldots \text{'stb.}}$$

következőleg ha ezen végetlen sorzat:

$$(2)\quad \log. u_o + \log. u_1 + \log. u_2 + \log. u_3 + \ldots.. \log. u_n + \log. u_{n+1} \ldots\text{'stb.}$$

öszvehajlik, 's annak öszvetét s-el jegyezzük:

$$\text{Lim.}(u_o . u_1 . u_2 . u_3 \ldots..\; u_n) = e^{\text{Lim.}(\log u_0 + \log. u_1 + \log. u_2 + \log. u_3 + \ldots. \log. u_n)} = e^s$$

ellenben ha a' (2) alatti végetlen sorzat szét terül, ahoz képest a' mint annak öszvete állító vagy tagadó lehet, és igy:

$$\log. u_o + \log. u_1 + \log. u_2 + \log. u_3 + \ldots.. \log. u_2 = \pm \infty$$

leszen egyszersmind $e^{\infty} = \infty$; 's az (1) alatti tevet széthajlik ellenkező esetben ha a' sorzat öszvete tagado leszen:

$$\log. u_o + \log. u_1 + \log. u_2 + \log. u_3 + \ldots.. \log. u_n = -\infty$$

$$\text{az az: } e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}$$

$$\text{következőleg } u_o . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots.. u_n = 0$$

Melly átalános eseteket már most különösebben kell fejtegetnünk.

Hogy a' (2) alatti sorzat öszvehajoljék arra nézve megkivántatik, hogy az (n)-diktöl számlált tagok' öszvete:

$$Q_n = \log. u_n + \log. u_{n+1} + \log. u_{n+2} + \log. u_{n+3} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

az (n)-nek végetlenül nöttével fogyatkozzék. (95 lap.) De ezen feltételnek különben elég nem tétethetik, hanem ha (n)-nek végetlen nöttével $\log. u_n$ végetlenül kicsinnyé válik, melly hogy megtörténhessék kell lenni:

$$\text{Lim.}(u_n) = 1$$

mind az által ezen feltétel telyesültéből is, az (1) alatti tevet' öszvehajlására általános következést nem húzhatnak. Hanem:

Fejtessenek ki öszvehajló sorzatokra a' Q_n-et tevő sorzat' minden egyes tagai, azon tanítmányok szerint mellyek a' számlagokrol már a' fentebbiekben böven előadattak, 's e' végre ha különben nem lehetne az egyes tagok:

$$u_n;\quad u_{n+1};\quad u_{n+2};\quad u_{n+3};\quad u_{n+4}\ldots\ldots\text{'stb.}$$
$$1+v_n;\quad 1+v_{n+1};\quad 1+v_{n+2};\quad 1+v_{n+3};\quad 1+v_{n+4}\ldots\ldots\text{'stb.}$$

formákra veendők, hogy v_n; v_{n+1}; v_{n+2}; v_{n+3}; ..... 'stb. az (n)-nek végetlen nöttével végetlenül fogyatkozó mennyiségeket jelentsenek. Ezen általváltoztatások közben jöttével pedig találni fogjuk:

$$\log.\ u_n = v_n - \frac{v^2_n}{2} + \frac{v^3_n}{3} - \frac{v^4_n}{4} + \frac{v^5_n}{5} - \ldots\ldots\text{'stb.}$$

$$\log.\ u_{n+1} = v_{n+1} - \frac{v^2_{n+1}}{2} + \frac{v^3_{n+1}}{3} - \frac{v^4_{n+1}}{4} + \frac{v^5_{n+1}}{5} - \ldots\ldots\text{'stb.}$$

$$\log.\ u_{n+2} = v_{n+2} - \frac{v^2_{n+2}}{2} + \frac{v^3_{n+2}}{3} - \frac{v^4_{n+2}}{4} + \frac{v^5_{n+2}}{5} - \ldots\ldots\text{'stb.}$$

következőleg tétetvén rövidítésül:

$$v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + v_{n+4}\ldots\ldots = V_1$$
$$v^2_n + v^2_{n+1} + v^2_{n+2} + v^2_{n+3} + v^2_{n+4}\ldots\ldots = V_2$$
$$v^3_n + v^3_{n+1} + v^3_{n+2} + v^3_{n+3} + v^3_{n+4}\ldots\ldots = V_3$$
$$v^4_n + v^4_{n+1} + v^4_{n+2} + v^4_{n+3} + v^4_{n+4}\ldots\ldots = V_4$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$Q_n = V_1 - \frac{V_2}{2} + \frac{V_3}{3} - \frac{V_4}{4} + \ldots\ldots\text{'stb.}$$

Most már a' V_1; V_2; V_3; .... 'stb. által jegyzett öszvetek' formájábol kitetszik, hogy ha V_1 végetlenül fogy, szintúgy sőt annál inkább V_3; V_5; V_7...nek 'stb. végetlenül kisebbedni kelletik; 's nem különben ha V_2 végetlenül fogy, ugyan az történik V_4; V_6; V_8;...al 'stb. A' V_1-nek végetlen kisebbedéséből azonban a' V_2-nek végetlen fogyatkozását csak akkor következtethetjük, ha a' V_1-nek minden külön tagai egyenlő jegygyel illetvék, vagy midőn V_1 ha szinte minden tagoknak egyenlő jegyet adunk is végetlenül kicsinynek megmarad.

Tegyük fel, hogy (n)-nek végetlenül nöttével mind V_1 mind V_2 végetlenül fogyatkozik. Ez esetben Q_n elenyészvén az (1) alatti tevetnek öszve kell hajlani, 's határa a' 0-tol különböző $=$ e'.

Ha viszont (n)-nek végetlenül nöttével V_1 ugyan végetlenül fogy, V_2 pedig végetlenül nevekedik; Q_n-nek tagadólag végetlen nagygyá kell válnia. Tehát ez esetben az (1) alatti tevet végetlenül 0-hoz közelít.

Ugyan ez értetik akkor is ha (n)-nek végetlenül nőttével V_1 tagadóvá és végetlen nagygyá lesz.

Mivel pedig V_1 és V_2 e' következendő végetlen sorzatoknak:

$$v_0;\ v_1;\ v_2;\ v_3;\ v_4;\ v_5\ldots\ldots \text{'stb.}$$
$$v_0^2;\ v_1^2;\ v_2^2;\ v_3^2;\ v_4^2;\ v_5^2\ldots\ldots \text{'stb.}$$

vagy másképen kitéve im ezeknek:

$$u_0-1;\ u_1-1;\ u_2-1;\ u_3-1;\ u_4-1;\ \ldots\ldots \text{'stb.}$$
$$(u_0-1)^2;\ (u_1-1)^2;\ (u_2-1)^2;\ u_3-1)^2;\ u_4-1)^2;\ \ldots\ldots \text{'stb.}$$

a' v_{n-1} és v^2_{n-1}-vel vagy, $u_{n-1}-1$ és $(u_{n-1}-1)^2$-vel jegyzett tagokra következő pótlékai: az eddigi lehozatok után szabályul vehetjük:

Hogy a' végetlen számu tagokbol öszvetett szorzók tevete;

$$u_0 . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots\ldots u_n$$

mellyeknek egyes tagai u_0; u_1; u_2; u_3..... 'stb. állítók, végetlenül valami 0-tol különböző határhoz közelítenek, ha

$$u_0-1;\ u_1-1;\ u_2-1;\ u_3-1;\ u_4-1\ldots\ldots \text{'stb. és}$$
$$(u_0-1)^2;\ (u_1-1)^2;\ (u_2-1)^2;\ (u_3-1)^2;\ (u_4-1)^2\ldots\ldots \text{'stb.}$$

egyszersmind öszvehajlanak. Ellenben ha az első sorzat öszvehajlik mi alatt a' második szét terül, vagy ha az első sorzat szét terül 's annak öszvete tagadó; akkor a' tevetnek határa $= 0$; 'S végezetre ha az első sorzat állítólag végetlenül nő a' tevetnek szét terülése világos.

Mellyek szerint a' következő szorzók' tevete:

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\ldots\ldots$$

öszvehajlik 's határa a' 0-tol különböző véges mennyiség. Továbbá:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots = 0$$

Ellenben:

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots$$

szét terül.

Nevezetes a' következendő szorzók' tevete:

$$\left(\frac{1}{z+1}\right).\left(\frac{2}{z+2}\right).\left(\frac{3}{z+3}\right).\left(\frac{4}{z+4}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n.n^z}{z+n}\right)$$

vagy más alakban:

$$\frac{1^{z+1}}{z+1}.\frac{2^{z+1}}{1^z(z+2)}.\frac{3^{z+1}}{2^z(z+3)}\ldots\ldots\ldots\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)}$$

mellyben (n) állító egész, z pedig akarmi számot jelenthet. Azon esetet kivévén, midőn (z)-nek tagadó egész szám értéket adunk, 's annál fogva a' nevező tagai közt valahol 0-nak kell elő kerülni, ezen tevet bizonyos határhoz közelít. Mellynek megmutatására leszen:

$$Q_n = \log.\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)}+\log.\frac{(n+1)^{z+1}}{n^z(z+n+1)}+\log.\frac{(n+2)^{z+1}}{(n+1)^z(z+n+2)}+\ldots\text{'stb.}$$

mivel pedig;

$$\log.\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)}=\log.\left(\frac{n}{n-1}\right)^z+\log.\left(\frac{n}{z+n}\right)=-z\log.\left(\frac{n-1}{n}\right)-\log.\left(\frac{n+z}{n}\right)$$

$$=-z\log.\left(1-\frac{1}{n}\right)-\log.\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

és: (223 lap) ha $n > z$

$$-z\log.\left(1-\frac{1}{n}\right)=z\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}+\ldots\right\}$$

$$\log.\left(1+\frac{z}{n}\right)=\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2}+\frac{z^3}{3n^3}-\frac{z^4}{4n^4}+\ldots\text{'stb.}$$

honnét:

$$\log.\frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)}=z\left\{\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}+\ldots\text{'stb.}\right\}$$

$$+\frac{z^2}{2n^2}-\frac{z^3}{3n^3}+\frac{z^4}{4n^4}-\ldots\text{'stb.}$$

tehát az elsőbb sorzat öszvete kevesebb mint

$$\frac{z}{2n^2}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots\right\}=\frac{z}{2n^2}.\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{z}{2n(n-1)}$$

az az kevesebb mint $\frac{z}{2(n-1)^2}$

Továbbá: A' második sorzat' öszvete is kevesebb mint $\frac{z^2}{2n^2}$; következőleg:

$$\log. \frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)} < \frac{z}{2(n-1)^2} + \frac{z^2}{2n^2}$$

'S hasonlag találtatván, ha (n) helyett (n+1); (n+2)..... 'stb. tétetik:

$$\log. \frac{(n+1)^{z+1}}{n^z(z+n+1)} < \frac{z}{2n^2} + \frac{z^2}{2(n+1)^2}$$

$$\log. \frac{(n+2)^{z+1}}{(n+1)^z(z+n+2)} < \frac{z}{2(n+1)^2} + \frac{z^2}{2(n+2)^2}$$

. . . .

leszen: $$Q_n < \frac{z}{2}\left\{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\ldots \text{'stb.}\right\}$$

$$+ \frac{z^2}{2}\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots \text{'stb.}\right\}$$

vagy $$Q_n < \frac{z(1+z)}{2}\left\{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \text{'stb.}\right\}$$

melly utolsó kitételben a' rekesz alá foglalt sorzat, ezen öszvehajló sorzatnak

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots \text{'stb.}$$

éven pótléka, azzal mint szükségképen elenyészővel, Q_n-nek is egyszersmind végetlenül kicsinnyé kell lenni.

És igy (n)-nek végetlenül nöttével:

$$\text{Lim.} \frac{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ \ldots\ldots n.\, n^z}{(z+1)\ (z+2)\ (z+3)\ (z+4)\ldots\ldots(z+n)}$$

bizonyos, (0)-tol különböző, mindazáltal (z)-töl függésben lévő határhoz közelít mellyet a' hasonló függvények megkülönböztetésére Gaussal $\Pi(z)$-vel jegyzendünk.

Ezen $\Pi(z)$ függvényt a' z-nek adott értékéhez képest, (ha t. i. mint fentebb megjegyzettük nem tagadó egész szám) számlagokkal ki lehet számítani. Melly közben észrevehetjük:

$$\text{Lim.} \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ n.\, n^z}{(z+1)\,(z+2)\ldots(z+n)} = \frac{1}{z+1}\,\text{Lim.} \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n.\, n^{z+1}}{(z+2)\,(z+3)\ldots\ldots(z+n+1)}$$

mivel az egyenlet jobbik oldalához kapcsolt szorzónak

$$\frac{n}{z+n+1} = \frac{1}{1+\frac{z+1}{n}}$$

az (n) végetlenül nőttével: határa egység. Következőleg állani fognak a' következő egyenletek:

$$\Pi(z) = \frac{\Pi(z+1)}{z+1} \text{ vagy}$$

(3) $\Pi(z+1) = (z+1)\,\Pi(z)$

Annak okáért minden állító egész számra nézve melly legyen (m)

(4) $\Pi(z+m) = (z+1)\,(z+2)\,(z+3)\ldots\ldots(z+m)\,\Pi(z)$

Melly egyenletböl kitűnik, hogy a' $\Pi(z)$-nek minden értékeit $z=0$-tol kezdve $z=1$-ig tudni elégséges hogy azokbol a' nevezett függvénynek egyéb értékei meghatároztassanak. Például:

Mivel $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots n.\ n^0}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots n} = 1$ mellyben $z=0$ innét

$\Pi(0) = 1.$ következőleg:

$\Pi(1) = 1.$

$\Pi(2) = 1.\ 2.$

$\Pi(3) = 1.\ 2.\ 3.$

$\Pi(4) = 1.\ 2.\ 3.\ 4.$

. . . .

$\Pi(r) = 1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots(r-1)\,r.$

Egyébiránt ha (z) állító, ugyan az leszen $\Pi(z)$ is. De ha (z)-nek tagadó értéket adunk, a' szerint a' mint a' (z)-ben foglalt legnagyobb egész szám páros vagy páratlan a' $\Pi(z)$ is állító vagy tagadó leszen, melly a' (3) alatti egyenletböl azonnal szembetűnhetik.

IV. További észrevételek.

1. Közhasználatban kétféle számlagok vannak, egyik mellynek szerítője (modulus) $= 1$ alapja $e = 2{,}71828\ 18284\ 59\ldots$ 'stb. 's legegyszerűbb létök miatt természeteseknek, ezenkivül pedig néha Neper számlagainak 's hyperbolai számlagoknak is neveztetnek. Melly két utókbi elnevezésekre nézve:

a.) Neper v. Napier a' számlagok' első feltalálója, a' maga számlagainak mellyeket különösen a' háromszögméreti kiszámítások könnyítésére készített, illyetén értelmítését (definitio) adta. A' Sinusnak számlaga azon szám, melly lehető közelítéssel azon egyenes vonalt fejezi ki, melly míg a' küllő (radius) ezen sinusig egyarányosan mérleges haladásban fogyott, az alatt egyenlőn számlagos haladásban nevekedett, kezdetben mind kettőnek ugyan azon sebessége lévén. Hogy ezen szavak' értelmét az analysis mostani világosabb kitételeivel öszvehasonlíthassuk legyen a' küllő $= 1$ a' Sinus $= \alpha = 1 - \alpha^{\frac{1}{r-n}}$. Találtuk fentebb:

$$\text{lognat. } \alpha = n \left(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

és mivel mostani rendszereinkben a' számlagok a' számokkal együtt, Neper felfogása szerint pedig azoknak fogytával nevekednek, ezen utóbbi nézethez alkalmazva

$$\text{lognat } \alpha = n \left(1 - \alpha^{\frac{1}{n}}\right)$$

Ezen kitételekben ha (n)-nek számokban megállapitandó legnagyobb értéket adunk melly legyen $= r$; ennek fogytával a' rekesz alatti $\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r}}\right)$; $\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r-1}}\right)$; $\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r-2}}\right) \ldots \ldots \left(1 - \alpha^{\frac{1}{r-n}}\right)$ a' küllőnek α-ig egyarányos fogytát fogják jelenteni, mellynél fogva ha viszont azon vonalat melly ezen idő alatt $(r-n)\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r}}\right)$; $(r-n+1)\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r}}\right)$; $(r-n+2)\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r}}\right) \ldots r\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r}}\right)$-ig nevekedett, tesszük egyenletünkbe:

$$\text{Lognep. } \alpha = r\left(1 - \alpha^{\frac{1}{r}}\right)$$

nem egyéb mint α-nak a' természeti rendszerbe tartozó, és (r)-nek felvett értékével lehetségig megközelített számlaga.

Egyébiránt hogy Neper fogalma a' számlagokrol mind átalánosan, mind különösen a' természetes számlagokra nézve eddigi lehozatainkal egyezik, a' fentebbekben (236 lap) adott alkatokbol még világosabban ki fog tetszeni. Azok szerint a' természetes rendszerben $\Sigma = 1$ határértékével:

$$e = \text{Lim.} (1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}}; \quad z = e^x = \text{Lim.} (1 + \omega)^{\frac{x}{\omega}}$$

az átalános rendszerben:

$$\alpha = \text{Lim.} (1 + \Sigma\omega)^{\frac{1}{\omega}}; \quad z = \alpha^x = \text{Lim.} (1 + \Sigma\omega)^{\frac{x}{\omega}}$$

Mellyekre Neper értelmítését (definitio) alkalmazván (e) a' természetes rendszer alapszáma; (x) változó melly 0-tol kezdve szakatlanul nevekedhetik, tulajdonképen nem számbeli az az szakos (discreta) hanem szakatlan (continua) és vonalt jelentő (linearis) mennyiség, mellyet számokban csak közelítőleg lehet kitenni; 's ugyan ezt mondja Neper is „A' Simusnak (z) számlaga azon szám melly lehető közelitéssel azon egyenes vonalt fejezi ki.... 'stb.

b.) A' változó (x)-nek folytonosan nevekedő értéket adván, az nem egyéb mint az (x)-nek egyenlőn, számokban kitéve pedig számlagi haladásban nevekedése, melly alatt a' mi kitételeink' következtében

a' Sinus $= z = \text{Lim.}\left(1+\omega\right)^{\frac{x}{\omega}}$ egységtöl fogva arányosan nevekedik. Neper ellenkezőképen fogta fel mondván: a' küllő $= 1$; (x)-nek nöttével arányosan a' Sinusig fogyatkozott. 'S e' szerint nála a' növekedő Sinushoz (+z)-hez fogyatkozó számlag (—x) tartozik, az az: a' mi rendszereink állító számlagai nála tagadók és viszont.

c.) A' Neper nézeteihez alkalmazott számlagoknak tehát imez kifejtések fognának megfelelni. A' természetes rendszerben:

$$z = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\text{Lim.}\left(1+\omega\right)^{\frac{x}{\omega}}}$$

az átalános rendszerben:

$$z = \alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x} = \frac{1}{\text{Lim.}\left(1+\Sigma\omega\right)^{\frac{x}{\omega}}}$$

melly alkat változtatásnak tehát mint magában látható a' kiszámitásokra nézve, a' legközelebb mondottakon kivül semmi más befolyása nincs. Végzetül

d.) Azon megszorítás hogy mind kettőnek (Sinusnak és annak számlagának) kezdetben egyenlő sebessége legyen, csupán a' természetes rendszerre tartozhatik. Mert ha az (x)-et $= 0$-nak vesszük leszen:

$$z = e^0 = \text{Lim.}\left(1+\omega\right)^{\frac{0}{\omega}} = 1 \text{ és:}$$

$$z = \alpha^0 = \text{Lim.}\left(1+\Sigma\omega\right)^{\frac{0}{\omega}} = 1$$

Továbbá mivel:

$$e = \text{Lim.}\left(1+\omega\right)^{\frac{1}{\omega}};\quad e^{\omega} = \text{Lim.}\left(1+\omega\right)$$

látni való hogy a' természetes rendszerben midőn 0 helyett a' végetlen kicsiny ω számlagnak vétetik, ugyan akkor az 1-hez ω nevekedés járul, 's mind kettőnek kezdetkori sebessége $\omega = \omega$ egyenlő

Ellenben más rendszerekben:

$$\alpha = \text{Lim.} \left(1+\Sigma\omega\right)^{\frac{1}{\omega}};\ \alpha^{\omega} = \text{Lim.}\ (1+\Sigma\omega)$$

az ω végetlen kicsiny számlagnak, $\Sigma\omega$ nevekedés felel meg; 's a' nevekedés aránya

$$\frac{\Sigma\omega}{\omega} = \Sigma$$

2. Neper tehát fentebbiekben kifejtett nézetivel egyezőleg a' maga kiszámításait következő alapokra állítja.

a.) Feltévén hogy két különböző Sinus S-el és s-el jegyeztessék, a' számlagok határaira nézve megmutatta, hogy:

$$\log.\ s - S < \frac{S-s}{s}.r;\ \text{és:}$$

$$\log.\ s - S > \frac{S-s}{S}.\ r$$

Mi pedig a' fentebb (222 lapon) előadottak értelmében találtuk a' természetes rendszerben:

$$\log. a < m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right);\ \text{és}$$

$$\log. a > m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)$$

következőleg ha (a) az egységhez nagyon közelít,

$$\log. a < m(a-1)\quad \text{és}\ \log. a > m\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

tehát tétetvén $m = r$ és ha két Sinusok S; s; egymáshoz igen közel vétetnek mellynél fogva $a = \frac{S}{s} > 1$-nél mindazáltal egységhez nagyon közelít leszen:

$$\log.\ a = \log.\ S - \log.\ s.$$

És mivel Nepernél a' mi tagadó számlagaink állítók és viszont; ezenkivül az előre bocsátott feltételekhez képest (a)-nak $\frac{S}{s}$-et helyettezhetünk, állani fog:

$$\log.\ \text{nep}.\ s - \log.\ \text{nep}.\ S < m\left(\frac{S}{s} - 1\right) = \left(\frac{S-s}{s}\right).\ r$$

$$\text{lognep}.\ s - \text{lognep}.\ S > m\left(1 - \frac{s}{S}\right) = \left(\frac{S-s}{S}\right).\ r$$

Például: A' mérlegi haladás első tagának $t_1 = 10000000$; másodiknak $t_2 = t_1 - \frac{t_1}{1(0)^7} = 999\ 9999 \ldots\ldots$ 'stb. kilenczvenkilenczediknek

$t_{99} = t_{98} - \frac{t_{98}}{1(0)^7} = 999\,9901{,}00048$; századiknak $t_{100} = t_{99} - \frac{t_{99}}{1(0)^7} = 999\,9900{,}00049$ vétetvén, ha teszszük $S = 1000\,0000 = m = r$; $s = 999\,9999$; $a = \frac{S}{s}$; ezen felvételekhez képest (a) az egységhez nagyon közelítő töreket fog tenni, minekokáért lognep. $a =$ lognep. $\frac{s}{S} =$ lognep. s — lognep. S ezen két határ érték közé fog esni:

lognep. $a =$ lognep. s — lognep. $S < \frac{r(r-s)}{s} = 1{,}000\,0001$ és:

lognep. $a =$ lognep. s — lognep. $S > r - s = 1{,}000\,0000$ az az közép számmal:

$$\text{lognep.}\frac{999\,9999}{1000\,0000} = 1{,}000\,000\,05 \quad \text{Neper tábláiban} = 1$$

melly szerint az első aránylagos tag' $t_1 = 999\,9999$ számlaga, az adott felvételekhez képest lehető közelítéssel megtaláltatván, innét a' 100-dik aránylagosé lognep. t_{100} = lognep. $999\,9900{,}00049 = 100 \times 1{,}000\,000\,05 = 100{,}000\,005$

2. Példa. Kerestessék lognep. 999 9900

Az elébbi példában a' 999 9900,00049 számlaga lehető közelítéssel kitaláltatván, minthogy az adott szám az elébbi aránylagoshoz igen közel esik:

$$\text{lognep.}\frac{999\,9900}{999\,9900{,}00049} < \frac{(999\,9900{,}00049 - 999\,9900)r}{999\,9900} = \frac{0{,}00049}{999\,9900}$$

honnét valóságos osztás után:

lognep. $999\,9900 < 0{,}00049\,00049 +$ lognep. $999\,9900{,}00049 = 100{,}0004950049$

nem különben:

$$\text{lognep.}\frac{999\,9900}{999\,9900{,}00049} > \frac{(999\,9900{,}00049 - 999\,9900)r}{999\,9900{,}00049} = \frac{0{,}00049}{999\,9900{,}00049}$$

tehát valóságos osztás után:

lognep. $999\,9900 > 0{,}0004900048\ldots +$ lognep. $999\,9900{,}00049 = 100{,}0004950048$

melly két határok csak nem öszve esvén:

lognep. $999\,9900 = 100.000495$

Ellenben ha az elébbi aránylagos t_1; t_2; $t_3 \ldots t_{100}$-al jegyzett tagok' 's azoknak számlagai felkeresése nélkül követlenül ezen két határokbol;

$$\text{lognep.}\frac{999\,9900}{10000\,000} < \frac{10000\,000 - 999\,9900}{999\,9900}.\ 10000\,000 = 100{,}001001 \text{ és;}$$

$$\text{lognep.}\frac{999\,9900}{10\,000\,000} > 10\,000\,000 - 999\,9900 = 100$$

minthogy ez esetben $a^{\frac{1}{m}}$ helyett a' fentebb mondottak következtében (a)-t tenni, tetemesebb hibára visz, a' határ értékek egymástól távolabb esnének, 's a' felezés által eszközölhető megigazítás, kivált még távolabbra mind inkább bizonytalanabbá válnék.

Nem lévén czélunk a' Neper által használt kiszámítások' elrendelésébe bővebben ereszkedni, az előadottakat legalább a' fogalmak' némi felvilágosítására, melly nélkül homályosnak látszhatik mind az, hogy miképen jutott az első feltaláló mai analytikai ismeretek nélkül a' jelenleg természetesnek nevezett számlagi rendszerre, mind az, hogy miképpen tudhatta azokat eléggé közelítő pontossággal kiszámítani; — részletesebben megemlítendőknek véltük. Melly utóbbinak elítélhetésire szolgálhat hogy midőn kiszámításait 5000000-ig folytatta, $\frac{5000000}{10000000} = \frac{1}{2}$-nek számlagát 6931469, 22-nek teszi, melly is megfordított viszonyban nálunk a' 2-nek felelvén meg, találjuk tábláinkban

$$\text{lognat. } 2 = 0,\ 693\ 147\ 180\ 559\ 945 \ldots.$$

's ezen öszvehasonlításból eléggé pontos öszve egyezés látható.

3.) A' természetes számlagok néha hyperbolaiaknak is neveztetnek. Alkalmat szolgáltatott reá az egyenoldalu hyperbolában az elérhetlenek közötti tér' (spatium intra asymptotos) négyszögitésének legelébb Mercator által történt felfedezése, melly szerint, az (x)-nek megfelelő:

$$\text{hyperbolaitér} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \text{'stb.} = \text{lognat. } (1+x)$$

mint a' fentebbiekben találtuk. Mivel azonban egyéb hyperbolai terek, és számlagi rendszerek közt hasonló viszonyok léteznek, ezen elnevezés csak annyiban állható a' mennyiben alatta jelesül egyenoldalu hyperbola értetik.

4.) Briggs megváltoztatta a' Neper rendszerét, 's hogy az, a' számolási tizedes rendszerrel egyezőbb legyen, az egységet a' 10 számlagának vette fel, vagy is új rendszerének alapjául a' 10-es számot tevé, helyesebbnek látván egyszersmind azt is, hogy a' számlagok a' nekik megfelelő számokkal együtt nevekedjenek és fogyjanak. Ki számításait pedig leginkább az előadandó kétféle módon folytatta.

a.) Felvett rendszeréhez képest, minden számoknak mellyeknek számlagai kerestetnek, ezen mérleges haladásban kelletvén foglaltatniok:

$$1 \ldots.\ 10 \ldots.\ 10^2 \ldots.\ 10^3 \ldots.\ 10^4 \ldots.\ 10^5 \ldots.\ 10^6 \ldots. \text{'stb.}$$

ha az adott számot mellynek számlaga kerestetik Q-nak a' keresendő számlagot (x)-nek nevezzük, kell lenni:

$$Q = 10^x$$

Mostan ha a' Q-t mind addig egymásután felsőbb hatványokra emeljük, míg nem Q^m a' (10)-nek valamelly felsőbb hatványát megközelíti, leszen $Q^m \gtrless 10^{mx}$ és a' Q-nak 10-nek ezen hatványai, (illetőleg m; mx) ismeretesekké lévén megtaláltatik $x = \frac{mx}{m}$ melly is a' keresett számlaghoz annál inkább fog közelíteni, minél közelebb jár Q^m a' $(10)^{mx}$ hez 's a' mint $Q^m \gtrless (10)^{mx}$ szinte úgy (x)-nek igaz értéke a' megközelítettnél mellyet ξ-vel különböztethetünk: $x \gtrless \xi$.

Például: Ha a' 2-nek számlaga kerestetnék, minthogy az utóbbi számjegyek mellőzésével $2^{1000} = 107(0)^{299}$ és $(10)^{301} = 100(0)^{299}$; látnivalóképen 2^{1000} a' $(10)^{301}$-hez közelít, és $2^{1000} > (10)^{301}$ honnét $\xi = \frac{301}{1000} = 0{,}301 < x = \text{Log. } 2$.

Más felül $2^{100000} = 999(0)^{30100}$ és $(10)^{30103} = 1000(0)^{30100}$; látnivalóképen 2^{100000} a' $(10)^{30103}$hoz közelít, és $2^{100000} < (10)^{30103}$ honnét $\xi = \frac{30103}{100000} =$ $0{,}30103 > x = \text{Log. } 2$.

A' minthogy valóban a' 2-nek tábláinkban találtató számlaga $= 0{,}3010299956....$ e' két határok közé esik, melly szerint:

$$\text{Log. } 2 = 0{,}301\,0299\,956..... > 0{,}301 \text{ és viszont:}$$
$$\text{Log. } 2 = 0{,}301\,0299\,956..... < 0{,}30103$$

Egyéb iránt hogy Briggs ezen kiszámítási módjának a' fentebb (214 lap) előadottal némi hasonlatossága van, 's valamint ott ugy itt is az utóbbi számjegyek' elmellőzésével a' felemeléseket rövidített szorozással végezhetni, magában szembe tűnhetik.

b.) Legyen akarmi felvétethető rendszerben átalánosan az alapszám $= a$; és:

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + y \text{ honnét Log. } (1+y) = \frac{1}{m}; \text{ Nem különben:}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + y' \text{ honnét Log. } (1+y') = \frac{1}{n},$$

Találtuk pedig már a' fentebbiekben:

$$\text{Log.}(1+y)=M\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\ldots\ldots\text{'stb.}\right)$$

$$\text{Log.}(1+y')=M\left(y'-\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{3}y'^3-\frac{1}{4}y'^4+\ldots\text{'stb.}\right)$$

következőleg ha y és y' igen kicsinynek vétetik a' felsőbb hatványok' elhagyásával:

$$\text{Log.}(1+y):\text{Log.}(1+y')=\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=y:y' \text{ és:}$$

$$\text{Log.}(1+y')=\frac{\text{Log.}(1+y)}{y}\,.\,y' \text{ honnét:}$$

$$\text{egyfelül: } \frac{\frac{1}{m}}{y}=\frac{1}{my}=M$$

másfelül: $\text{Log.}(1+y')=My'$; Mellyeknek alkalmazására.

Például: Briggs mint fentebb is láttuk a' 10-nek négyszög gyökerét 54-szer egymásután kivonván, találta:

$$10^{\frac{1}{2^{54}}}=1{,}00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35\ldots\ldots \text{ mellyben}$$

$$y=0{,}00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2^{54}}=0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 827\ldots.$$

$$\text{'s innét: } M=\frac{\frac{1}{m}}{y}=\frac{0{,}5551\ 11512\ 31257\ 827\ldots.}{1{,}2781\ 91493\ 20032\ 35\ldots\ldots} \text{ az az:}$$

$$M=0{,}4324\ 94481\ 90325\ 18\ldots..$$

Ha tehát ezekután Q-nak számlaga kivántatnék, kerestetvén folyvásti gyökér kihuzásokkal míg nem y' felette kicsiny leend $Q^{\frac{1}{n}}=1+y'$; mivel

$$Q=(1+y')^n;\ \text{Log.}Q=n.\ \text{Log.}(1+y')$$

innét elsőben $\text{Log.}(1+y')=My'$; azután pedig maga a' Q-nak számlaga $\text{Log.}\ Q=n\ \text{Log.}\ (1+y')$ könnyen kitaláltatható.

5.) A' tagadó mennyiségek' számlagai iránt támadott vítatkozásokrol, mint a' mellyek semmi tanulságos kelctkezményekre nem vezetnek, szóllani feleslegesnek tartván, valamint a' számlagi táblák' elrendezését 's azoknak használata módját, mellyek úgy is minden efféle táblák' elején bevezetésképen szoktak előadatni, mellőzvén; a' fentebbi (212 lap.) előadások' kiegészítésére.

6.) Közöljük a' 10 gyökereinek Long által (1724-ben) közzé tett kiszámításait Kramp után (Anfangsgründe der Arithmetik Köln, 1808 l. Elemente der reinen Mathematik von Leopold Schulz von Strassnicki, Wien 1831.)

$\sqrt[10]{10}$

$10^{0,1}$	=1,258925 411794......	$10^{0,2}$	=1,584893 192465......
$10^{0,3}$	=1,995262 314973......	$10^{0,4}$	=2,511886 431514......
$10^{0,5}$	=3,162277 660174......	$10^{0,6}$	=3,981071 705537......
$10^{0,7}$	=5,011872 336275......	$10^{0,8}$	=6,309573 444804......

$10^{0,9}$ =7,943282 347244......

$\sqrt[100]{10}$

$10^{0,01}$	=1,023292 992281......	$10^{0,02}$	=1,047128 548091......
$10^{0,03}$	=1,071519 305236......	$10^{0,04}$	=1,096478 196142......
$10^{0,05}$	=1,122018 454301......	$10^{0,06}$	=1,148153 621496......
$10^{0,07}$	=1,174897 554939......	$10^{0,08}$	=1,202264 434617......

$10^{0,09}$ =1,230268 770812......

$\sqrt[1000]{10}$

$10^{0,001}$	=1,002305 238078......	$10^{0,002}$	=1,004615 790277......
$10^{0,003}$	=1,006931 668851......	$10^{0,001}$	=1,009252 886076......
$10^{0,005}$	=1,011579 454259......	$10^{0,006}$	=1,013911 385736......
$10^{0,007}$	=1,016248 692870......	$10^{0,008}$	=1,018591 388054......

$10^{0,009}$ =1,020939 483708......

$\sqrt[10000]{10}$

$10^{0,0001}$	=1,000230 285021......	$10^{0,0002}$	=1,000460 623073......
$10^{0,0003}$	=1,000691 014168......	$10^{0,0004}$	=1,000921 458319......
$10^{0,0005}$	=1,001151 955538......	$10^{0,0006}$	=1,001382 505837......
$10^{0,0007}$	=1,001613 109228......	$10^{0,0008}$	=1,001843 765724......

$10^{0,0009}$ =1,002074 475336...

$\sqrt[100000]{10}$

$10^{0,00001}$	=1,000023 026116......	$10^{0,00002}$	=1,000046 052762......
$10^{0,00003}$	=1,000069 079939......	$10^{0,00004}$	=1,000092 107645......
$10^{0,00005}$	=1,000115 135882......	$10^{0,00006}$	=1,000138 164649......
$10^{0,00007}$	=1,000161 193947......	$10^{0,00008}$	=1,000184 223775......

$10^{0,00009}$ =1,000207 254133......

$\frac{m}{10^{1000000}}$

$10^{0,000001}$	$=1,000002\,302589\ldots\ldots$	$10^{0,000002}$	$=1,000004\,605183\ldots\ldots$
$10^{0,000003}$	$=1,000006\,907782\ldots\ldots$	$10^{0,000004}$	$=1,000009\,210386\ldots\ldots$
$10^{0,000005}$	$=1,000011\,512991\ldots\ldots$	$10^{0,000006}$	$=1,000013\,815605\ldots\ldots$
$10^{0,000007}$	$=1,000016\,118225\ldots\ldots$	$10^{0,000008}$	$=1,000018\,420850\ldots\ldots$

$$10^{0,000009}=1,000020\,723480\ldots\ldots$$

$\frac{m}{10^{10000000}}$

$10^{0,0000001}$	$=1,000000\,230259\ldots\ldots$	$10^{0,0000002}$	$=1,000000\,460518\ldots\ldots$
$10^{0,0000003}$	$=1,000000\,690777\ldots\ldots$	$10^{0,0000004}$	$=1,000000\,921036\ldots\ldots$
$10^{0,0000005}$	$=1,000001\,151295\ldots\ldots$	$10^{0,0000006}$	$=1,000001\,381554\ldots\ldots$
$10^{0,0000007}$	$=1,000001\,611813\ldots\ldots$	$10^{0,0000008}$	$=1,000001\,842072\ldots\ldots$

$$10^{0,0000009}=1,000002\,072330\ldots\ldots$$

$\frac{m}{10^{100000000}}$

$10^{0,00000001}$	$=1,000000\,023026\ldots.$	$10^{0,00000002}$	$=1,000000\,046052\ldots.$
$10^{0,00000003}$	$=1,000000\,069078\ldots.$	$10^{0,00000004}$	$=1,000000\,092104\ldots.$
$10^{0,00000005}$	$=1,000000\,115130\ldots.$	$10^{0,00000006}$	$=1,000000\,138155\ldots.$
$10^{0,00000007}$	$=1,000000\,161181\ldots.$	$10^{0,00000008}$	$=1,000000\,184207\ldots.$

$$10^{0,00000009}=1,000000\,207233\ldots$$

$\frac{m}{10^{1000000000}}$

$10^{0,000000001}$	$=1,000000\,002303\ldots.$	$10^{0,000000002}$	$=1,000000\,004605\ldots.$
$10^{0,000000003}$	$=1,000000\,006908\ldots.$	$10^{0,000000004}$	$=1,000000\,009210\ldots.$
$10^{0,000000005}$	$=1,000000\,011513\ldots.$	$10^{0,000000006}$	$=1,000000\,013816\ldots.$
$10^{0,000000007}$	$=1,000000\,016118\ldots.$	$10^{0,000000008}$	$=1,000000\,018421\ldots.$

$$10^{0,000000009}=1,000000\,020723\ldots.$$

$\frac{m}{10^{10000000000}}$

$10^{0,0000000001}$	$=1,000000\,000230\ldots.$	$10^{0,0000000002}$	$=1,000000\,000461\ldots.$
$10^{0,0000000003}$	$=1,000000\,000691\ldots.$	$10^{0,0000000004}$	$=1,000000\,000921\ldots.$
$10^{0,0000000005}$	$=1,000000\,001151\ldots.$	$10^{0,0000000006}$	$=1,000000\,001382\ldots.$
$10^{0,0000000007}$	$=1,000000\,001612\ldots.$	$10^{0,0000000008}$	$=1,000000\,001842\ldots.$

$$10^{0,0000000009}=1,000000\,002072\ldots$$

$\frac{m}{100000000000}$

$10^{0,00000000001} = 1,000000\,000023....$	$10^{0,00000000002} = 1,000000\,000046....$
$10^{0,00000000003} = 1,000000\,000069....$	$10^{0,00000000004} = 1,000000\,000092....$
$10^{0,00000000005} = 1,000000\,000115....$	$10^{0,00000000006} = 1,000000\,000138....$
$10^{0,00000000007} = 1,000000\,000161....$	$10^{0,00000000008} = 1,000000\,000184....$

$$10^{0,00000000009} = 1,000000\,000207....$$

$\frac{m}{1000000000000}$

$10^{0,000000000001} = 1,000000\,000002....$	$10^{0,000000000002} = 1,000000\,000005....$
$10^{0,000000000003} = 1,000000\,000007....$	$10^{0,000000000004} = 1,000000\,000009....$
$10^{0,000000000005} = 1,000000\,000012....$	$10^{0,000000000006} = 1,000000\,000014....$
$10^{0,000000000007} = 1,000000\,000016....$	$10^{0,000000000008} = 1,000000\,000018....$

$$10^{0,000000000009} = 1,000000\,000021...$$

$\frac{m}{10000000000000}$

$10^{0,0000000000001} = 1,000000\,000000....$	$10^{0,0000000000002} = 1,000000\,000000....$
$10^{0,0000000000003} = 1,000000\,000001....$	$10^{0,0000000000004} = 1,000000\,000001....$
$10^{0,0000000000005} = 1,000000\,000001....$	$10^{0,0000000000006} = 1,000000\,000001....$
$10^{0,0000000000007} = 1,000000\,000002....$	$10^{0,0000000000008} = 1,000000\,000002....$

$$10^{0,0000000000009} = 1,000000\,000002....$$

7.) Az idézett helyen (229 lap.) adott tudósítások szerint az 1.) alatti 3-dik emeletü egyenlet feltalálása Bordának tulajdoníttatik, mellyet az a.) alatti átalános formára Delambre vett; a' 2-dik szám alatti negyedik emeletü egyenlet továbbá Haros a' többi következők pedig Lavernède által adattak. Nem látszik azonban hogy a' nevezett jeles tudósok átalános felfejtés birtokában lettek volna, minél fogva a' felhozott egyenletek körül tett egyes vizsgálatok, mellyekben az egyik egyenlet utolsó taga vagy $= 0$'s a' másiké 0-tol különböző; vagy az egyik egyenletben végről tagadó, a' másikban ugyan ott az elébbivel egyenlő állító mennyiség fordul elő, ezenkívül minden egyenletekben egy vagy több tagok hiányzanak; csak azért sem lévén ki elégítők mert, hogy a' feladott formáju egyenletek létezhetése szükségképen ezen feltételekhez legyen köttetve, előlegesen állítani nem lehet: béfejezetül az ide tartozó feladatot: „kétféle, 's egymástol csak az utolsó tagban különböző egyenleteket találni, mellyeknek gyökerei egész arányos számok legyenek, fogjuk megoldani. Mellyekre nézve lehozatainkat különösebben a' 3-dik és 4-dik emeletü egyenletekre alkalmazván:

a.) Minden felsőbb egyenleteket, második emeletü egyenletekböl szorozás által öszvetetteknek gondolhatunk, melly szerint a' felsőbb egyenletek' átalános kitétele lesz:

$$(u^2+au+b)\,(u^2+a_1u+b_1)\,(u^2+a_2u+b_2)\ldots(u^2+a_mu+b_m)$$

mellyben ha a' felsőbb egyenlet' páratlan hatványa kivántatnék, az utolsó szorzóban $b_m = 0$.

b.) Ennél fogva hogy két, ugyan azon hatványra emelkedő egyenleteket nyerhessünk, mellyekben minden ösztevők egyenlők lévén, mind a' mellett is a' végső tagban különbözzenek, ezen két egyenletek nem lehetnek azonosok. azért is egyiknek a' másikétol különböző 2-dik emeletü szorzókbol kell öszve tétetniök, az az: a' másiknak kell lenni:

$$(\omega^2+\alpha\omega+\beta)\,(\omega^2+\alpha_1\omega+\beta_1)\,(\omega^2+\alpha_2\omega+\beta_2)\ldots\ldots(\omega^2+\alpha_m\omega+\beta_m)$$

lévén itten is a' páratlan emeletü egyenletekben $\beta_m = 0$.

c.) Ezekböl az ösztevőket valóságos szorozás által keresvén, 's az ugyan azon hatványokhoz tartozókat mind két felöl egymáshoz egyenlítvén, kitelhető számu egyenleteket formálhatunk, 's azoknak feloldásában a' szokott módokat kellene követnünk. Például:

A' negyedik emeletü egyenletekre nézve adva volnának:

egyikben: $(u^2+au+b)\,(u^2+mu+n)$
másikban: $(\omega^2+\alpha\omega+\beta)\,(\omega^2+\mu\omega+\nu)$; honnét kellene lenni:

I.)

1.) $a+m = \alpha+\mu$
2.) $b+am+n = \beta+\alpha\mu+\nu$
3.) $bm+an = \beta\mu+\alpha\nu$

3 egyenlet 8 ismeretlennel. Mindazáltal:

d.) További feltételeink lévén, hogy a' gyökerek egyűl egyig arányos egész számok legyenek; mivel a' 2-dik emeletü egyenletek' gyökereinek átaláno formája:

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b)} - \frac{1}{2}a$$

ha különböztetés kedviért, a' gyökér jegygyel illetett mennyiségeket egyik egyenletben $\frac{1}{2}$x-el $\frac{1}{2}$ z-vel... másikban: $\frac{1}{2}$ ξ-vel $\frac{1}{2}$ ζ-val 'stb. jegyezzük, állani kell a' következő viszonyoknak:

II.)

$$1.)\ x=\sqrt{(a^2-4b)};\ z=\sqrt{(m^2-4n)};\ \xi=\sqrt{(\alpha^2-4\beta)};\ \zeta=\sqrt{(\mu^2-4\nu)}$$

$$2.)\ a=\sqrt{(x^2+4b)};\ m=\sqrt{(z^2+4n)};\ \alpha=\sqrt{(\xi^2+4\beta)};\ \mu=\sqrt{(\zeta^2+4\nu)}$$

$$2.)\ b=\frac{a^2-x^2}{4};\ n=\frac{m^2-z^2}{4};\ \beta=\frac{\alpha^2-\xi^2}{4};\ \nu=\frac{\mu^2-\zeta^2}{4}$$

mellyekben hogy a' gyökerek egész arányos számok legyenek, minden béfoglalt mennyiségeknek egész arányos számoknak kelletvén lenni: az illető négyszög egyenletek' u; u'...val ω; ω'...val jegyzendő gyökereire nézve is ugyan azon feltételek alatt:

III.)

$$1.)\ u=\frac{\pm x-a}{2};\quad u'=\frac{\pm z-m}{2}\ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

$$2.)\ \omega=\frac{\pm\xi-\alpha}{2};\quad \omega'=\frac{\pm\zeta-\mu}{2}\ldots\ldots\ \text{'stb.}$$

továbbá, a' II.) alatti értékek' helyretételével:

e.) Az előnkbe adott feltételekhez alkalmazva, az I.) alatti általváltoztatott egyenletek volnának:

IV.)

$$1.)\ \sqrt{(x^2+4b)}+\sqrt{(z^2+4n)}=\sqrt{(\xi^2+4\beta)}+\sqrt{(\zeta^2+1\nu)}$$

$$2.)\ \frac{a^2-x^2}{4}+\sqrt{(x^2+4b)}\,.\,\sqrt{(z^2+4n)}+\frac{m^2-z^2}{4}$$

$$=\frac{\alpha^2-\xi^2}{4}-\sqrt{(\xi^2+4\beta)}\,.\,\sqrt{(\zeta^2+4\nu)}+\frac{\mu^2-\zeta^2}{4}$$

$$3.)\ \frac{a^2-x^2}{4}\sqrt{z^2+4n)}+\sqrt{x^2+4b)}\cdot\frac{m^2-z^2}{4}$$

$$=\frac{\alpha^2-\xi^2}{4}\cdot\sqrt{\zeta^2+4\nu)}+\sqrt{\xi^2+4\beta)}\cdot\frac{\mu^2-\zeta^2}{4}$$

három egyenlet tizenkét ismeretlennel. 'S ez utóbbi egyenletekből általláthatjuk:

f.) Hogy itt, a' feladatnak határozott megoldásához kilencz ismeretlen értékének megállapítása kivántatnék. Mellyet ha a' II.) alatti egyenletekbe fogalt törvények szerint tenni akarunk, viszont az I.) alatti egyenletekben szükségképen hat ismeretlen leszen megállapítva, 's a' feladat a' még fentmaradt 2 ismeretlen közt, 3 egyenlettel, túlhatározottá (plus quam determinatum) válik.

Például: (a; b; x); (m; z; n); (α; ξ; β) a' II.) szerint együtt 's egyszersmind felveendő értékei megállapíttatván, az I.)-ben csupán μ és ν maradna a' feltett 3 egyenletből meghatározandó. Mellynek elkerülésére előlegesen csak a' 6 elsőbb mennyiségek megállapítására szorítkozván, 's az ezen megállapítások törvényei szerint felvétethető, 's közelebb meghatározandó mennyiségeket:

g.) Ezentul A; B; C;-vel jegyezvén, adva lesznek:

V.)

$$1.)\ A=a+m\qquad=\alpha+\mu$$
$$2.)\ B=b+am+n\qquad=\beta+\alpha\mu+\nu$$
$$3.)\ C=bm+an\qquad=\beta\mu+\alpha\nu$$

mellyekből a' feladat megfejtésének körülményeit különösebben kell meghatároznunk. E' végre:

A' harmadik emeletü egyenletekre nézve.

Mivel ezekben csak két ösztevő tartozik egyenlő lenni; ezenkivül az a.) alatt (256 lap) mondottak' értelmében, $\nu=\frac{\mu^2-\zeta^2}{4}=0$ tehát:

$$1.)\ A=\alpha+\mu$$
$$2.)\ B=\frac{\alpha^2-\xi^2}{4}+\alpha\mu$$
$$3.)\ \mu^2=\zeta^2$$

az 1.) és 2.) alatti egyenletek felfejtéséből találtatik:

$$1.)\ \alpha=\pm\frac{1}{3}\sqrt{4A^2-12B-3\zeta^2)}+\frac{2}{3}A$$

$$2.)\ \mu=A-\alpha$$

$$3.)\ \mu^2=\zeta^2$$

'S ezek szerint mivel $A=B=0$ értékével a' feladat' megoldása lehetetlenné válik, legyen

1.) $A=0$; ez esetben B-nek tagadónak kell lenni, melly felvételek a' Borda és Delambre egyenleteire vezetnek, tétessék

Például: $A=0;\ B=-3;\ \xi=0$ leszen;

$$\alpha=\pm\frac{1}{3}\sqrt{36})=\pm 2$$

mellyből az öszvetartozó értékek:

$$\begin{Bmatrix} a= & 2; & b=1 \\ m=- & 2; & n=0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \alpha=- & 2; & \beta=1 \\ \mu= & 2; & \nu=0 \end{Bmatrix} \text{ és:}$$

$$f(x)=(x^2+2x+1)\ (x^2-2x)=x^4-3x^2-2x=x^3-3x-2=0$$

$$\varphi(x)=(x^2-2x+1)\ (x^2+2x)=x^4-3x^2+2x=x^3-3x+2=0$$

's az illető négyszög egyenletek' gyökerei II.) III.) szerint

$$\left.\begin{matrix} \text{egyikben: } u=-1;\ u=-1;\ u'=\ 2;\ u'=0 \\ \text{másikban: } \omega=\ 1;\ \omega=\ 1;\ \omega'=-2;\ \omega'=0 \end{matrix}\right\} \text{ honnét:}$$

$$f(x)=(x+1)\ (x+1)\ (x-2)x=x^4-3x^3-2x=x^3-3x-2=0$$

$$\varphi(x)=(x-1)\ (x-1)\ (x+2)x=x^4-3x^2+2x=x^3-3x+2=0$$

mint fentebb (227 lap).

2.) Legyen $B=0$; és mivel A-nak 3-al oszthatónak kell lenni $A=3$

$$\text{honnét } \alpha=\pm\frac{1}{3}\sqrt{36-3\xi^2)}+2$$

tehát tétetvén $\xi=0$; az öszvetartozó értékek:

$$\begin{Bmatrix} a= & 4; & b=4 \\ m=- & 1; & n=0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \alpha=0; & \beta=0 \\ \mu=3; & \nu=0 \end{Bmatrix} \text{ és:}$$

$$f(x)=(x^2+4x+4)\ (x^2-x)=x^4+3x^3-4x=x^3+3x^2-4=0$$

$$\varphi(x)=x^2(x^2+3x)\ =\ x^4+3x^3\ =x^3+3x^2\ =0$$

az illető négyszög egyenletek' gyökerei pedig II.) III.) szerint:

$$\left.\begin{matrix} \text{egyikben: } u=-2;\ u=-2;\ u'=\ 1;\ u'=0 \\ \text{másikban: } \omega=\ 0;\ \omega=\ 0;\ \omega'=-3;\ \omega=0 \end{matrix}\right\} \text{ honnét:}$$

$$f(x)=(x+2)\ (x+2)\ (x-1)x=x^4+3x^3-4x=x^3+3x^2-4=0$$
$$\varphi(x)=x^2(x-3)x \quad = \quad x^4+3x^3 \quad =x^3+3x^2 \quad =0$$

3.) Legyen mind az A; mind a' B; 0-tol különböző, 's tegyük:

$A=6;\ B=5;\ \xi=1$ leszen;

$$\alpha=\pm\frac{1}{3}\sqrt{144-60-3)}+4=7 \text{ és } =1$$

mellyekből az öszvetartozó értékek:

$$\left\{\begin{matrix} a= & 7;\ b=12 \\ m= & -1;\ n=\ 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \alpha=1;\ \beta=0 \\ \mu=5;\ \nu=0 \end{matrix}\right\} \text{ és:}$$

$$f(x)=(x^2+7x+12)\ (x^2-x)=x^4+6x^3+5x^2-12x=x^3+6x^2+5x-12=0$$
$$\varphi(x)=(x^2+x)\ (x^2+5x) \quad =x^4+6x^3+5x^2 \quad =x^3+6x^2+5x \quad =0$$

a' gyökerek pedig II.) III.) szerint

$$\left.\begin{matrix} \text{egyikben: } u=-3;\ u=-4; & u'=\ 0;\ u'=-1 \\ \text{másikban: } \omega=-1;\ \omega=\ 0; & \omega=-5;\ \omega'=\ 0 \end{matrix}\right\} \text{ honnét:}$$

$$f(x)=(x+3)\ (x+4)\ (x-1)\ =\ x^3+6x^2+5x-12=0$$
$$\varphi(x)=x\,(x+1)\,(x+5) \quad =\ x^3+6x^2+5x \quad =0$$

A' negyedik emeletü egyenletekre nézve:

A' fentebb lehozott egyenletek következtében:

1.) $A=a+m \quad =\alpha+\mu$

2.) $B=b+am+an=\beta+\alpha\mu+\nu$

3.) $C=bm+an \quad =\beta\mu+\alpha\nu$

és mivel $\mu=A-\alpha$; ezenkivül a' II.) alatti értékek helyettezésével:

$$4.)\ B=\frac{\alpha^2-\xi^2}{4}+A\alpha-\alpha^2+\frac{A^2-2A\alpha+\alpha^2-\xi^2}{4} \text{ innét:}$$

$$5.)\ \alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3A^2-8B-2(\xi^2+\zeta^2)}+\frac{1}{2}A$$

melly vég egyenletből α-nak értékeí feltaláltathatók lévén, olly felvételeket kell keresnünk, hogy azok egyszersmind a' 3.) alatti egyenletnek eleget tegyenek.

Például:

1.) Legyen $A=0$; B-nek tagadónak kell lenni.

Mellynél fogva B-nek egymás után $-1;\ -2;\ -3$...'stb. értéket adván találni fogjuk:

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{8-2(\xi^2+\zeta^2)} \text{ és ha tesszük } \xi=\zeta=1$$

$$\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{8-2(1+1)};\ \alpha = 1;\ \alpha = -1$$

vagy ha $\xi = 2$; $\zeta = 0$.

$$\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{8-2(4+0)};\ \alpha = 0;\ \alpha = -0$$

mellyekböl az öszvetartozó értékek :

$$\left\{\begin{matrix} a = 1;\ b = 0 \\ m = -1;\ n = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \alpha = 0;\ \beta = -2 \\ \mu = 0;\ \nu = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$f(x) = (x^2 + x + 0)\ (x^2 - x) = x^4 - x^2 = x^2 - 1 = (x+1)\ (x-1) = 0$$
$$\varphi(x) = (x^2 - 2)\, x^2 \qquad = x^4 - 2x^2 = x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

az az: mivel (256 lapon) mondottak értelmében, egy részröl a' felsőbb egyenletek' átalános formája alatt az alsóbbak, különösen a' 4-dik emeletüekében a' négyszög egyenletek (ha $b = 0$; $n = 0$); béfoglaltatnak ezen felvétellel egymástol csak az utolsó tagban különböző kétféle négyszög egyenletekre akadtunk ugyan; mindazáltal más részröl a' két kitalált egyenleteknek utóbbikában $\beta = 0$ helyett $\beta = -2$-nek találtatván, az illető két szorzók gyökér jegygyel illetett mennyiségek.

Legyen $B = -2$; tehát $\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{16-2(\xi^2+\zeta^2)}$

Ezen felvétel, mivel ξ-nek ζ-nak ollý értékeket hogy α egész arányos szám legyen, nem adhatunk, használhatatlan.

Legyen $B = -3$; tehát $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{24-2(\xi^2+\zeta^2)}$ találni fogjuk:

$$\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{24-2(9+1)}\text{-böl } \alpha = 1;\ \alpha = -1$$

$$\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{24-2(4+0)}\text{-bol } \alpha = 2;\ \alpha = -2$$

mellyek szerint az öszvetartozó értékek:

$$1.)\left\{\begin{matrix} a = 1;\ b = -2 \\ m = -1;\ n = 0 \end{matrix}\right\} \quad 2.)\left\{\begin{matrix} \alpha = 2;\ \beta = 0 \\ \mu = -2;\ \nu = 1 \end{matrix}\right\} \quad 3.)\left\{\begin{matrix} \alpha = -2;\ \beta = 0 \\ \mu = 2;\ \nu = 1 \end{matrix}\right\} \text{ és:}$$

$$1.)\ f(x) = (x^2+x-2)(x^2-x) = x^4 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)x-1) = 0$$
$$2.)\ \varphi(x) = (x^2+2x)(x^2-2x+1) = x^4 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1(x-1) = 0$$
$$3.)\ \varphi(x) = (x^2-2x)(x^2+2x+1) = x^4 - 3x^2 - 2x = x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)(x+1) = 0$$

's ezen felvételnek $n = \nu = 0$ felelvén meg, a' már többször ismételt észrevételek következtében ugyan azon köbök egyenletekre találtunk mint fentebb (259 lap.)

Legyen $B = -25$ tehát $\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{200 - 2(\xi^2 + \zeta^2)}$

leszen a' ξ-nek ζ-nak felvétethető értékeivel:

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{200 - 2(1+1)} = \pm 7$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{200 - 2(25+25)} = \pm 5$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{200 - 2(64+4)} = \pm 4$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{200 - 2(81+1)} = \pm 3$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{200 - 2(100+0)} = \pm 0$$

mellyekből az öszvetartozó értékek:

$$1.) \begin{cases} a = 7; & b = 12 \\ m = -7; & n = 12 \end{cases} \quad 2.) \begin{cases} \alpha = 5; & \beta = 0 \\ \mu = -5; & \nu = 0 \end{cases} \quad 3.) \begin{cases} \alpha = 4; & \beta = -12 \\ \alpha - -4; & \nu = 3 \end{cases}$$

$$4.) \begin{cases} \alpha = 3; & \beta = -18 \\ \mu = -3; & \nu = +2 \end{cases} \quad 5.) \begin{cases} \alpha = 0; & \beta = -25 \\ \mu = 0; & \nu = 0 \end{cases}$$

's ezeknek folytában a' 3.) és 4.) alattiaknak, mint a' mellyek a' feltételeknek telyesen eleget nem tesznek, elhagyásával a' Haros egyenletei:

$$1.)\ f(x) = (x^2 + 7x + 12)(x^2 - 7x + 12) = x^4 - 25x^2 + 144 = (x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$$

$$2.)\ \varphi(x) = (x^2 + 5x)(x^2 - 5x) = x^4 - 25x^2 = x^2(x-5)(x+5)$$

$$3.)\ \varphi(x) = (x^2 - 25)x^2 = x^4 - 25x^2 = x^2(x-5)(x+5)$$

2.) Legyen $A > 0$ és minthogy 2-vel oszthatónak kell lenni $A = 2$

honnét $\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{12 - 8B - 2(\xi^2 + \zeta^2)} + 1$

's tételvén $B = -11$; a' ξ-nek ζ-nak felvétethető értékeivel:

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100 - 2(0+0)} + 1; \quad \alpha = 6; \quad \alpha = -4$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100 - 2(9+9)} + 1; \quad \alpha = 5; \quad \alpha = -3$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2}\sqrt{100-2(16+16)}+1\,;\ \alpha=4\,;\ \alpha=-2$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{2}\sqrt{100-2(25+25)}+1\,;\ \alpha=1\,;\ \alpha=1$$

mellyekből az öszvetartozó értékek:

$$1.)\left\{\begin{matrix} a= & 6; & b=9 \\ m= & -4; & n=4 \end{matrix}\right\}\ 2.)\left\{\begin{matrix} \alpha= & 5; & \beta=4 \\ \mu= & -3; & \nu=0 \end{matrix}\right\}$$

$$3.)\left\{\begin{matrix} \alpha= & 4; & \beta=0 \\ \mu= & -2; & \nu=3 \end{matrix}\right\}\ 4.)\left\{\begin{matrix} \alpha= & 1; & \beta=-6 \\ \mu= & -1; & \nu=-6 \end{matrix}\right\}$$

következőleg:

$1.) f(x)=(x^2+6x+9)(x^2-4x+4)=x^4+2x^3-11x^2-12x+36=(x+3)^2(x-2)^2$
$4.) f(x)=(x^2+x-6)(x^2+x-6)=x^4+2x^3-11x^2-12x+36=(x+3)^2(x-2)^2$
$2.) \varphi(x)=(x^2+5x+4)(x^2-3x)=x^4+2x^3-11x^2-12x=(x+1)(x+4)(x-3)x$
$3.) \varphi(x)=(x^2+4x)(x^2-2x-3)=x^4+2x^3-11x^2-12x=(x+1)(x+4)(x-3)x$

mellyek a' (228 lapon) felhozottaknál annyiban is lényegesen más formájuak, hogy itt az x minden ösztevői 0-tol különbözők.

3.) Legyen A=6; honnét: $\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{108-8B-2(\xi^2+\zeta^2)}+3$

's tétetvén B=1 a' ξ-nek ζ-nak felvétethető értékeivel:

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(0+0)}+3=8=-2$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(9+9)}+3=7=-1$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(16+16)}+3=6=0$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(25+25)}+3=3=3$$

mellyekből az öszvetartozó értékek:

$$1.)\left\{\begin{matrix} a= & 8; & b=16 \\ m= & -2; & n=1 \end{matrix}\right\}\ 2.)\left\{\begin{matrix} \alpha= & 7; & \beta=10 \\ \mu= & -1; & \nu=-2 \end{matrix}\right\}$$

$$1.)\left\{\begin{matrix} \alpha=6; & \beta=5 \\ \mu=0; & \nu=-4 \end{matrix}\right\}\ 4.)\left\{\begin{matrix} \alpha=3; & \beta=-4 \\ \mu=3; & \nu=-4 \end{matrix}\right\}$$

következőleg:

$$\left.\begin{array}{l}1.)f(x)=(x^2+8x+16)(x^2-2x+1)\\ 4.)f(x)=(x^2+3x-4)\ (x^2+3x-4)\end{array}\right\}=x^4+6x^3+x^2-24x+16=(x+4)^2(x-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}2.)\varphi(x)=(x^2+7x+10)(x^2-x-2)\\ 3.)\varphi(x)=(x^2+6x+5)\ (x^2-4)\end{array}\right\}=x^4+6x^3+x^2-24x-20=(x+5)(x+1)(x+2)(x-2)$$

mellyekben nem csak minden ösztevők a' 0-tol; hanem egyszersmind az utolsó tagok is mind a' 0-tol mind egymástol különböző számok.

4.) Legyen $A=10$; $B=25$

honnét a' ξ-nek ζ-nak felvétethető értékeivel:

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(0+0)}+5=10=0$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(9+9)}+5=9=1$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(16+16)}+5=8=2$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-2(25+25)}+5=5=5$$

mellyekböl az öszvetartozó értékek:

$$1.)\left\{\begin{array}{ll}a=10; & b=25\\ m=0; & n=0\end{array}\right\}\quad 2.)\left\{\begin{array}{ll}\alpha=9; & \beta=18\\ \mu=1; & \nu=-2\end{array}\right\}$$

$$3.)\left\{\begin{array}{ll}\alpha=8; & \beta=+12\\ \mu=2; & \nu=-3\end{array}\right\}\quad 4.)\left\{\begin{array}{ll}\alpha=5; & \beta=0\\ \mu=5; & \nu=0\end{array}\right\}$$

következőleg:

$$\left.\begin{array}{l}1.)\ fx=(x^2+10x+25)x^2\\ 4.)\ fx=(x^2+5x)(x^2+5x)\end{array}\right\}=x^4+10x^3+25x^2=x^2(x+5)\ (x+5)$$

$$\left.\begin{array}{l}2.)\varphi(x)=(x^2+9x+18)(x^2+x-2)\\ 3.)\varphi(x)=(x^2+8x+12)(x^2+2x-3)\end{array}\right\}=x^4+10x^3+25x^2-36=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$

a' L a v e r n è d e egyenletei. Mellyeknél több példákat felhordani, 's további alkalmazásokat tenni körünkön kivül valónak tartjuk.